



★-Aufgabe: Fehlende Bitstrings

Revision 0062a36 (2021-04-28)

Seien n, k, ℓ positive ganze Zahlen mit $n = 2^\ell - k$. Die Elemente von $\{0, 1\}^\ell$ heißen *Bitstrings der Länge ℓ* . Ein Wesen namens Regloh besitzt ein unsortiertes Feld $A[1..n]$ von n unterschiedlichen Bitstrings der Länge ℓ ; das heißt, genau k Bitstrings der Länge ℓ kommen *nicht* in A vor. Regloh erlaubt Zugriff auf das Feld *nur* über eine Funktion $\text{FETCHBIT}(i, j)$, welche das j te Bit des Strings $A[i]$ zurückliefert.

- Im Fall $k = 1$ fehlt dem Feld A genau ein Bitstring. Beschreibe einen Algorithmus, der für eine Eingabe mit $k = 1$ den fehlenden Bitstring ausgibt und dabei nur $O(n)$ oft auf FETCHBIT zugreift.
- (schwer) Beschreibe einen Algorithmus, der für eine beliebige Eingabe mit $k \geq 1$ alle fehlenden Bitstrings ausgibt und dabei nur $O(n \log k)$ oft auf FETCHBIT zugreift.

Beispiel für b). Im Fall $k = 3, n = 5, \ell = 3$ und $A = ["100", "010", "110", "000", "111"]$ wäre $\text{FETCHBIT}(2, 2) = 1$ und $\text{FETCHBIT}(4, 1) = 0$, und der Algorithmus soll 011, 101 und 001 ausgeben.

Spezielle Bewertungskriterien. Wie immer werden grobe Idee, formale Beschreibung, Korrektheitsbeweis, und Laufzeitanalyse erwartet, wobei in dieser Aufgabe die Laufzeitanalyse besonders wichtig ist: In der Laufzeitanalyse, muss die Zahl der Zugriffe auf FETCHBIT beschränkt werden, d.h. alle anderen Schritte, die der Algorithmus ausführt, zählen diesmal nicht mit. Die Abgabe wird *akzeptiert*, wenn Aufgabe a) oder b) vollständig und korrekt gelöst wurde und dabei fast keine Abstriche in den allgemeinen Bewertungskriterien erkennbar sind. Aufgabe b) korrekt zu lösen erhöht den Lernerfolg, wird das Lehrpersonal freuen, und gibt einen kleinen Vorteil in der Bewertung.

Allgemeine Bewertungskriterien. Die folgenden Kriterien werden erwartet:

Autor:innen. Alle Autor:innen des Dokuments sind namentlich genannt.

Eigene Arbeit. Alle Regeln zum Zusammenarbeiten bei ★-Aufgaben wurden befolgt.

Rechtschreibung und Grammatik. Der Text ist annähernd fehlerfrei, und durchgehend in grammatikalisch korrekten und ganzen Sätzen geschrieben. *If you prefer to submit your solutions in English, please do so.*

Struktur. Der Text ist in nachvollziehbarer und zielgerichteter Weise strukturiert. Die Lösung zu einer Algorithmenaufgabe ist typischerweise wie folgt strukturiert:

- Grobe Idee: Zunächst wird die Idee des Algorithmus *in wenigen Worten* beschrieben.
- Formale Beschreibung: Der Algorithmus wird in natürlicher Sprache, Pseudocode, oder Code präzise, eindeutig und kompakt beschrieben.
- Korrektheitsbeweis: Die Korrektheit des Algorithmus wird bewiesen.
- Laufzeitanalyse: Die Laufzeit des Algorithmus wird analysiert.

Insbesondere sollten diese vier Aspekte klar getrennt sein und nicht ineinander fließen.

Korrektheit. Der Text enthält keine Widersprüche oder unzulässigen Folgerungen.

Leserliche Handschrift. (falls relevant) Die Handschrift ist durchgehend ohne Mühe lesbar.

Mathematik. Mathematische Ausdrücke sind korrekt gesetzt (z.B. n^2 anstatt $n^{\wedge}2$) und die mathematischen Ausdrücke sind grammatikalisch korrekt in die Satzstruktur eingebettet.

Wissenschaftssprache. Der sprachliche Ausdruck ist sachorientiert mit treffender Wortwahl und präzisen Formulierungen. Fachbegriffe werden einheitlich, präzise und auf den Inhalt der Kurse bezogen verwendet.