

Algorithmen und Datenstrukturen 1

ALGO1 · SoSe-2021 · tcs.uni-frankfurt.de/algo1

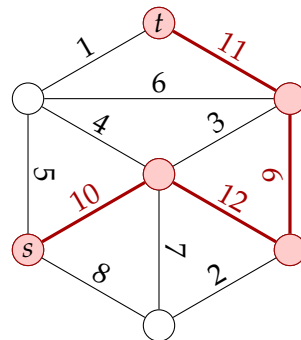


★-Aufgabe: Flaschenhals

Revision c7bb568 (2021-06-09)

For an English version of this exercise, see [Erickson, page 270].

Betrachte einen einfachen Weg zwischen zwei Knoten s und t in einem ungerichteten, gewichteten Graphen G . Die *Breite* dieses Wegs ist das minimale Gewicht, das auf den Kanten des Wegs vorkommt. Die Flaschenhals-Distanz zwischen s und t ist die Breite des breitesten einfachen Wegs von s nach t . (Wenn es keinen Weg von s nach t gibt, ist die Flaschenhals-Distanz $-\infty$. Die Flaschenhals-Distanz von s nach s ist ∞ .)



Die Flaschenhals-Distanz von s nach t ist 9.

- Beweise, dass der *maximale* Spannbaum von G zwischen *jedem* Paar von Knoten einen breitesten Weg enthält.
- Entwirf einen Algorithmus, der das folgende Problem in $O(n + m)$ Zeit löst: Gegeben ein ungerichteter, gewichteter Graph G mit zwei Knoten s und t sowie einem Gewicht W , ist die Flaschenhals-Distanz von s nach t höchstens W ?
- Sei B die Flaschenhals-Distanz von s nach t .
 - Beweise, dass sich die Flaschenhals-Distanz von s nach t nicht ändert, wenn man eine beliebige Kante von Gewicht kleiner B löscht.
 - Beweise, dass sich die Flaschenhals-Distanz von s nach t nicht ändert, wenn man eine beliebige Kante von Gewicht größer B *kontrahiert*. (Um eine Kante $e = \{u, v\}$ in G zu kontrahieren, wird die Kante e gelöscht und die beiden Endpunkte u und v werden zu einem neuen Knoten w verschmolzen. Falls dabei parallele Kanten entstehen, behalten wir nur die *schwerste* Kante zwischen jedem Paar von Knoten, und löschen die anderen. Der neue Graph heißt G/e .)
- (sehr schwer) Entwirf einen Algorithmus, der in Zeit $O(n + m)$ einen breitesten Weg von s nach t berechnet. *Hinweis: Du darfst hierfür annehmen, dass man den Median von m Zahlen in Zeit $O(m)$ berechnen kann.*

Hinweise zur Abgabe. In den Aufgabenteilen a und c werden mathematische Beweise erwartet, und in den Aufgabenteilen b und d die übliche Struktur (grobe Idee, Pseudocode, Korrektheitsbeweis, Laufzeitanalyse). Um einen ★ zu erhalten, müssen die Aufgabenteile a, b und c vollständig bearbeitet werden.