Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

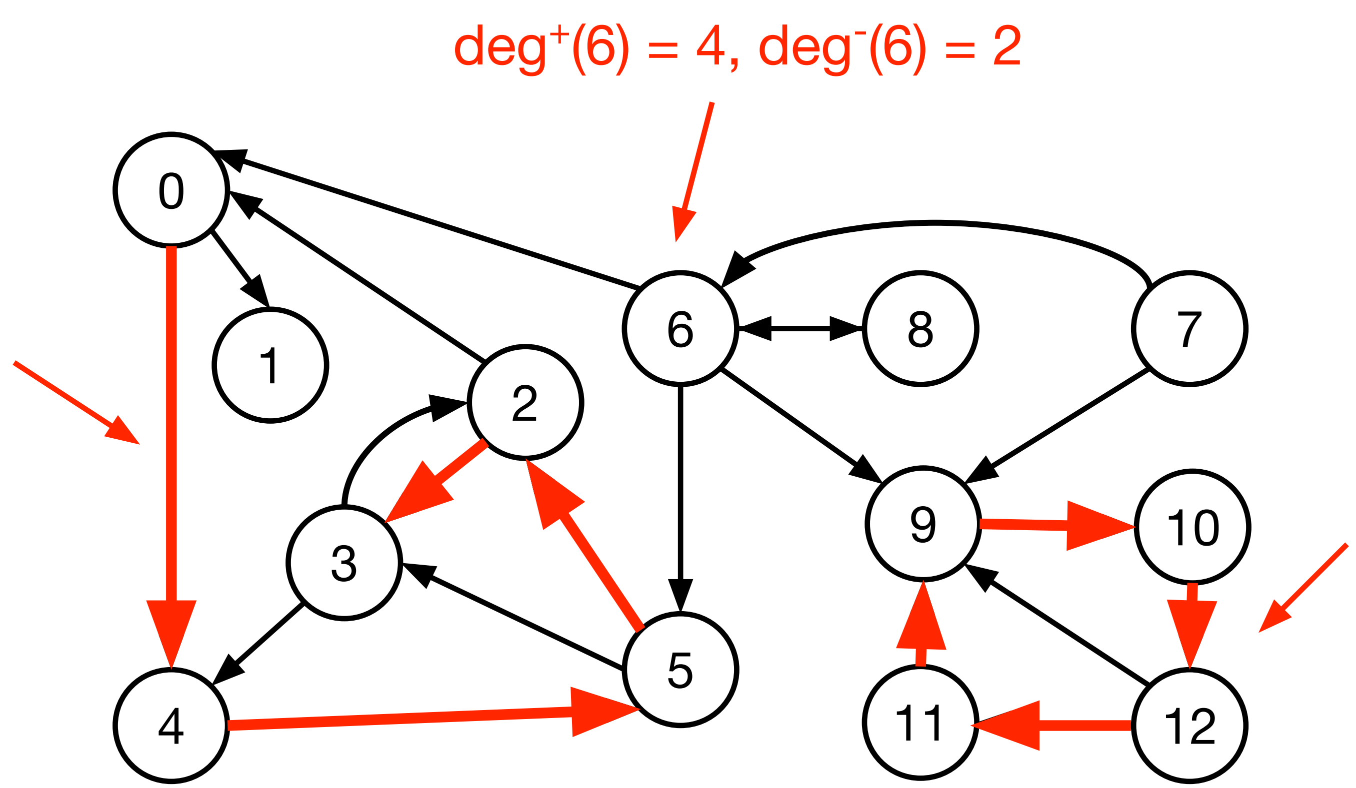
Holger Dell
Folien adaptiert von Philip Bille

Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

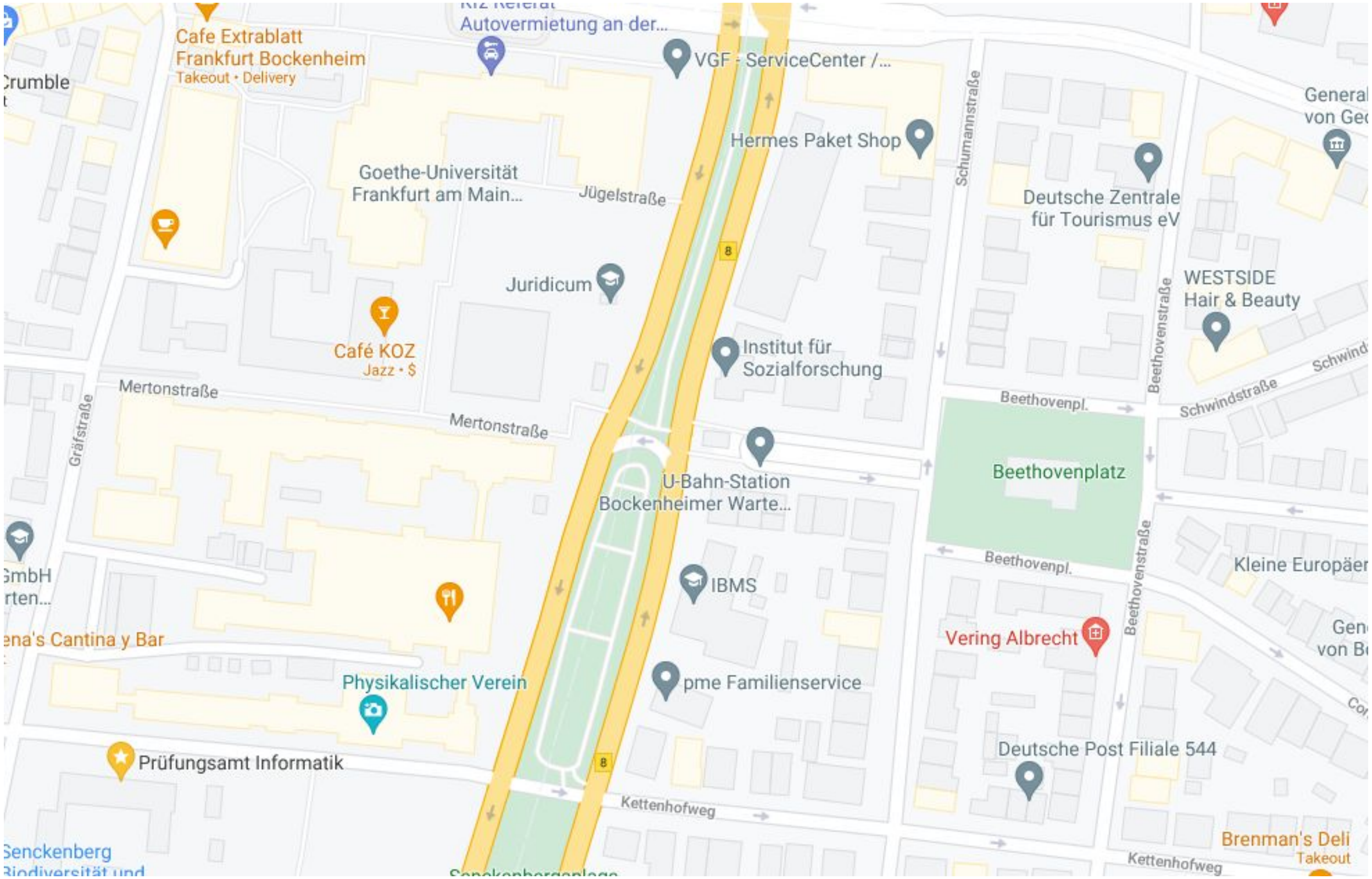
Gerichtete Graphen

- Gerichteter Graph. Knoten die paarweise durch gerichtete Kanten verbunden sein können.



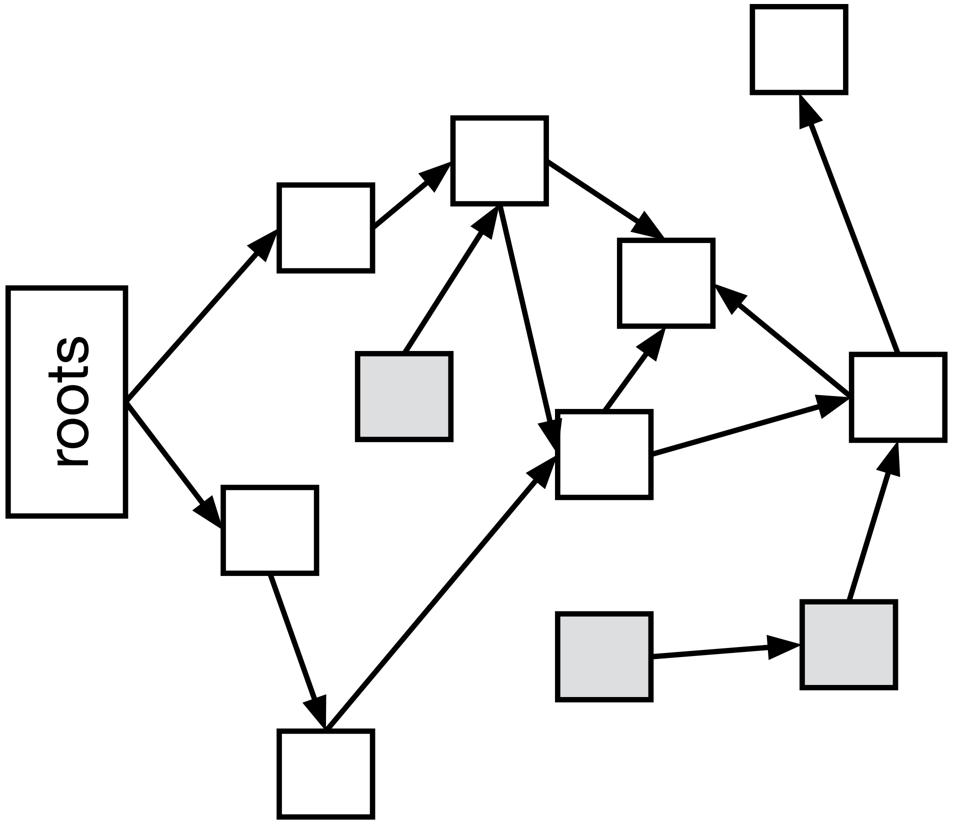
Straßennetzwerk

- Knoten = Kreuzung, Kante = (Einbahn)Straße.



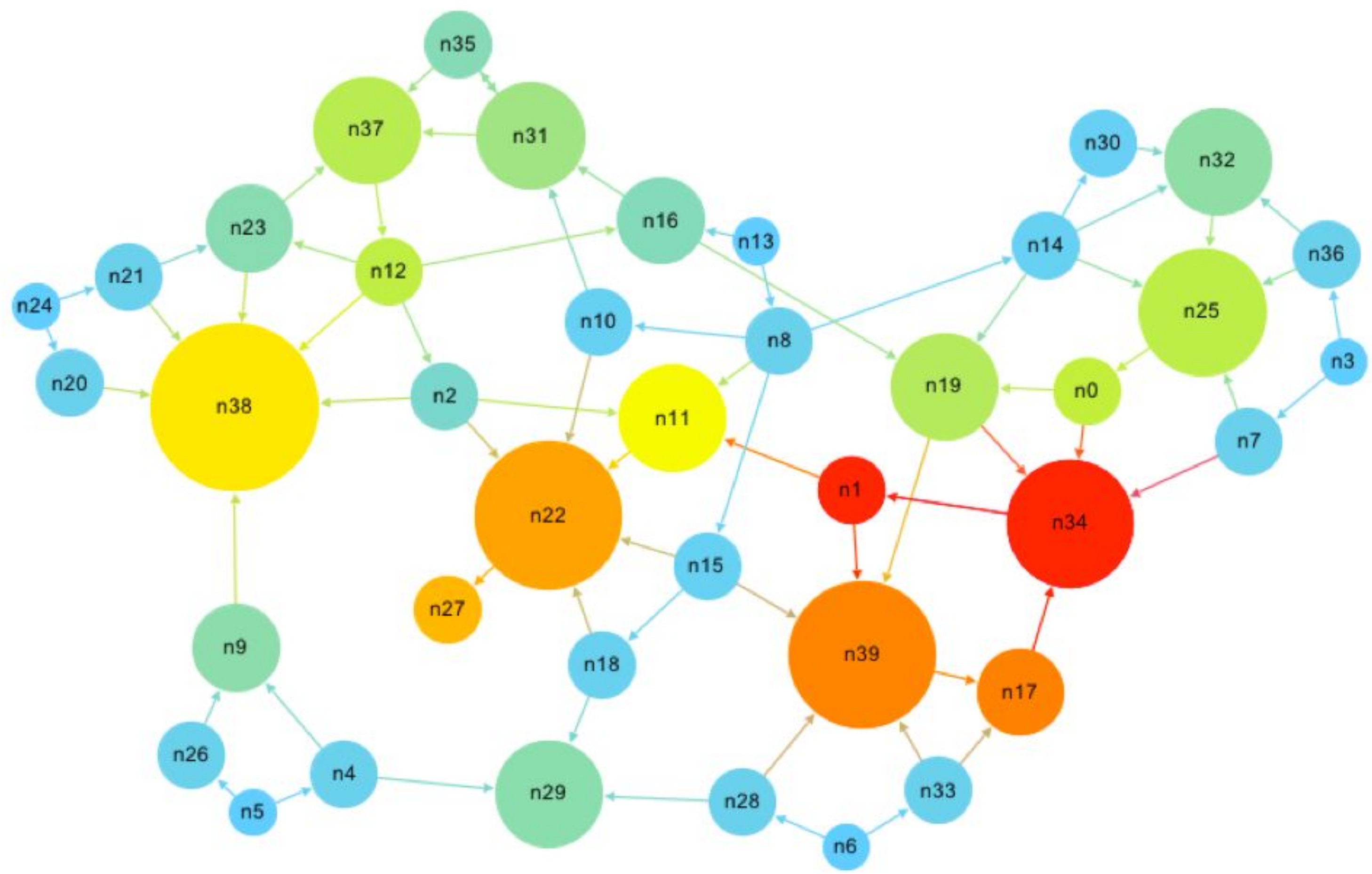
Garbage Collection

- Knoten = Objekt, Kante = Zeiger/Referenz.
- Welche Objekte sind von der Wurzel erreichbar?



WWW

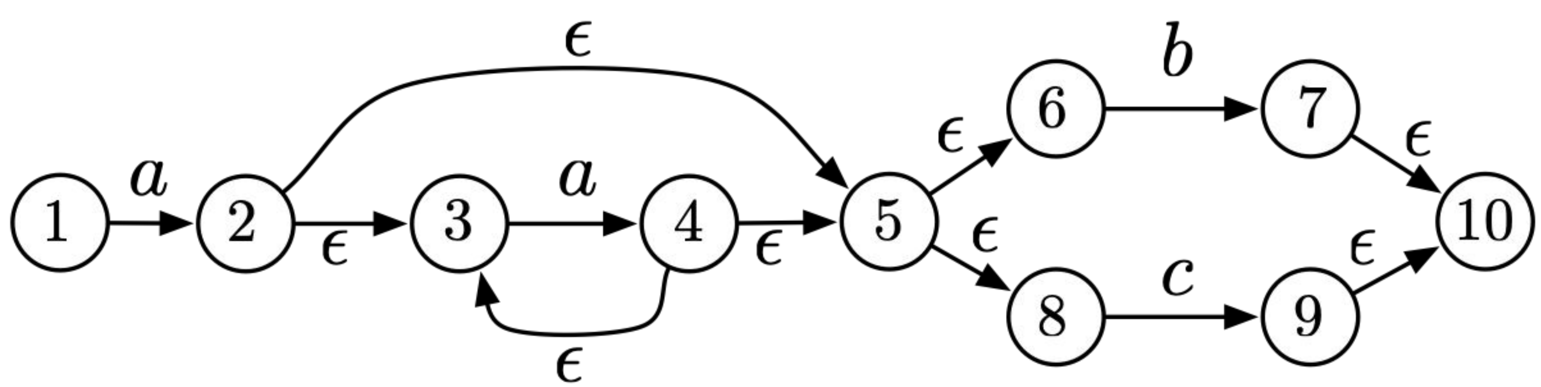
- Knoten = Webseite, Kante = Hyperlink.
- Web Crawling
- PageRank



http://computationalculture.net/article/what_is_in_pagerank

Automaten und Reguläre Ausdrücke

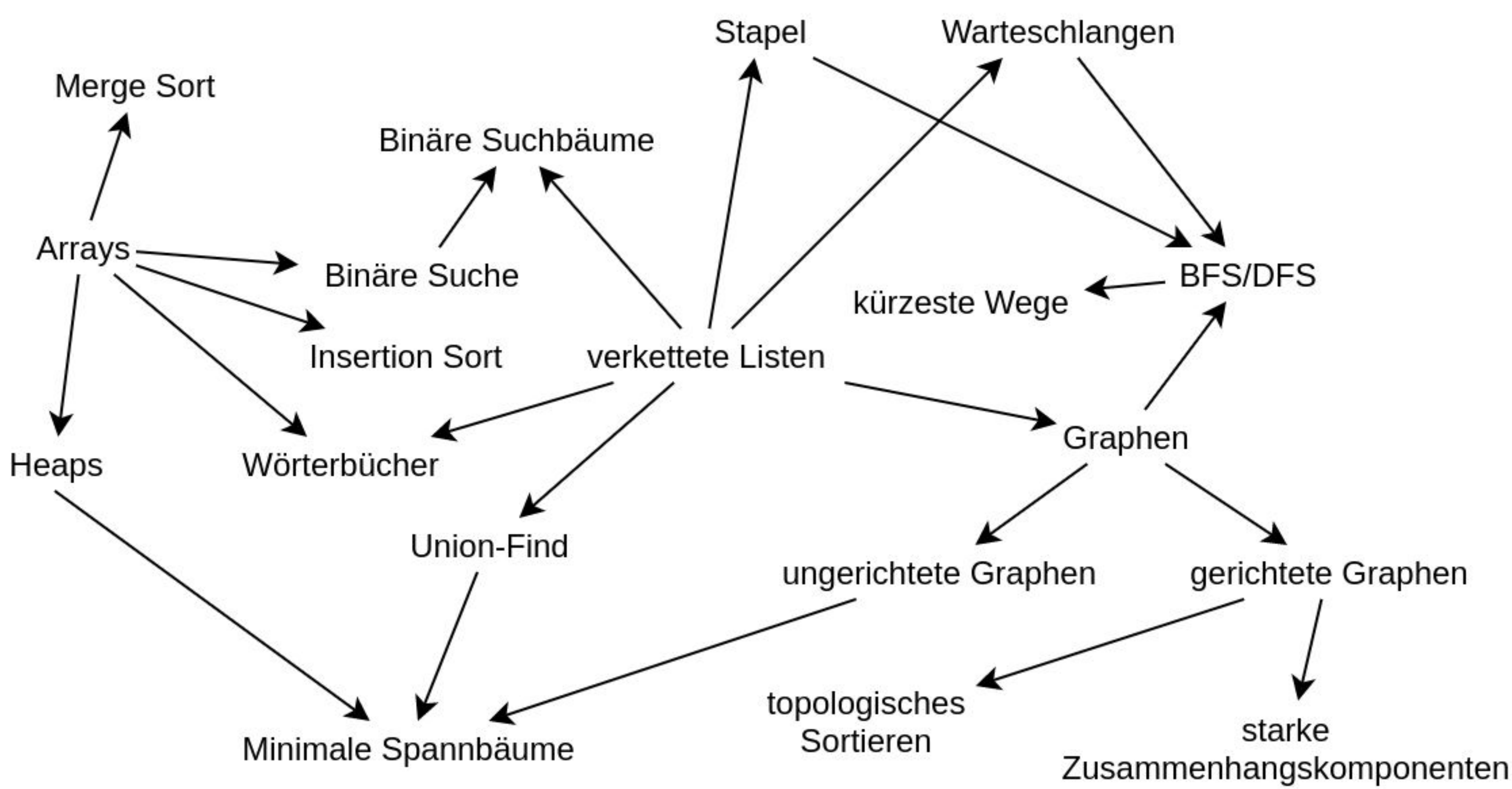
- Knoten = Zustand, Kante = Transition.
- Akzeptiert der Automat “aab” = gibt es einen Weg von 1 nach 10, der "aab" liest?
- Reguläre Ausdrücke können durch Automaten dargestellt werden.



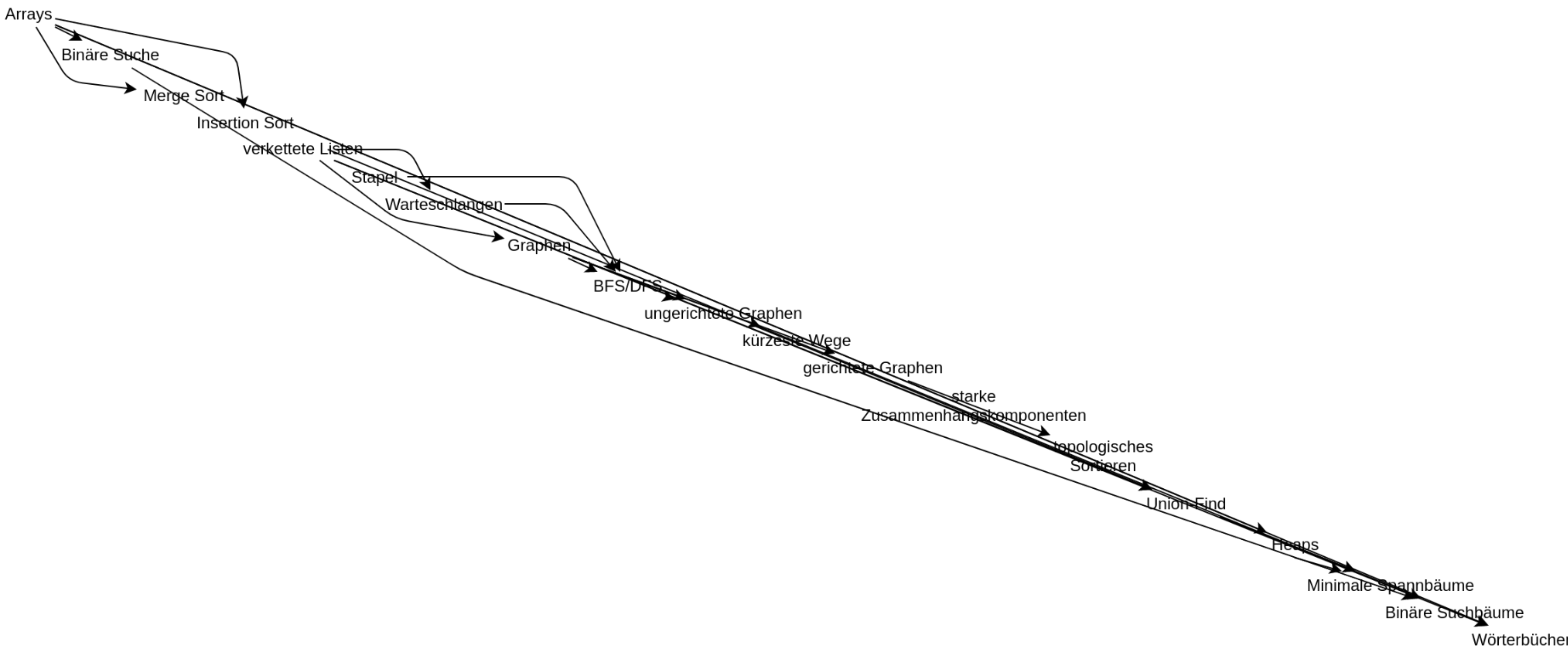
R = a·(a*)·(b|c)

Abhängigkeiten

- Knoten = Themen, Kante = Abhängigkeit.
- Gibt es zyklische Abhängigkeiten? Gibt es eine Knotenreihenfolge, die zyklische Abhängigkeiten vermeidet?



Abhängigkeiten

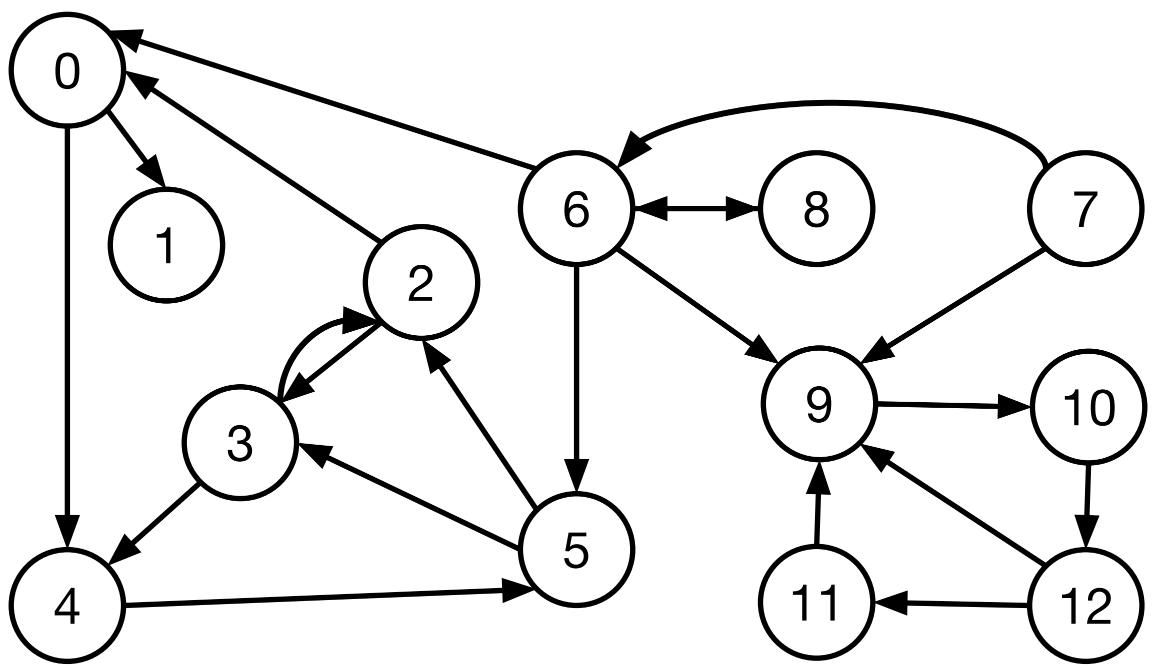


Anwendungen

Graph	Knoten	Edges
Internet	Webseiten	Hyperlinks
Verkehr	Kreuzungen	(Einbahn)Straßen
Scheduling	Jobs	Priorisierung
Infektionen	Personen	Infektionsrelation
Zitationen	Publikationen	Zitationen
Objektgraph	Objekte	Zeiger/Referenzen
Objekthierarchie	Klassen	Vererbung
Kontrollflussgraph	Codezeile	jump

Gerichtete Graphen

- Lemma. $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = m$.
- Beweisidee. Jede Kante hat genau einen Start- und einen Zielknoten.



Algorithmische Probleme auf gerichteten Graphen

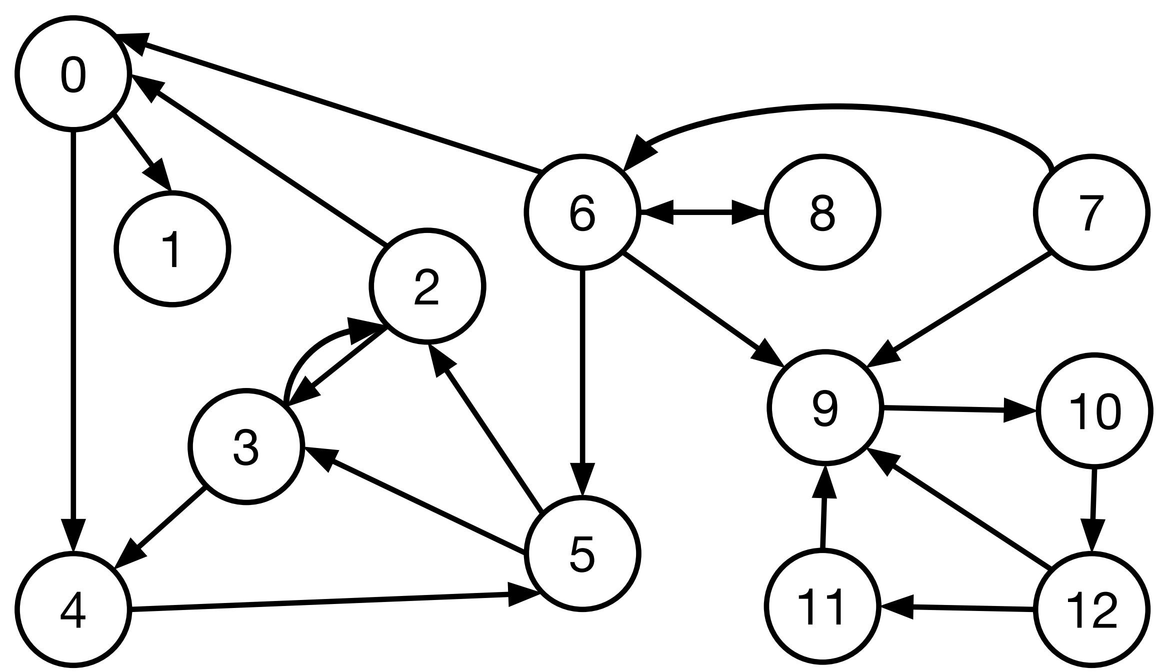
- Weg. Gibt es einen Weg von s nach t?
- Kürzester Weg. Was ist der kürzeste Weg von s nach t?
- Gerichteter azyklischer Graph. Enthält der Graph einen Kreis?
- Topologisches Sortieren. Können wir die Knoten von links nach rechts so anordnen, dass alle Kanten in dieselbe Richtung gerichtet sind?
- Starke Zusammenhangskomponente. Gibt es einen Weg zwischen allen Paaren von Knoten?
- Transitive Hülle. Für welche Knoten w gibt es einen Weg von v nach w?

Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

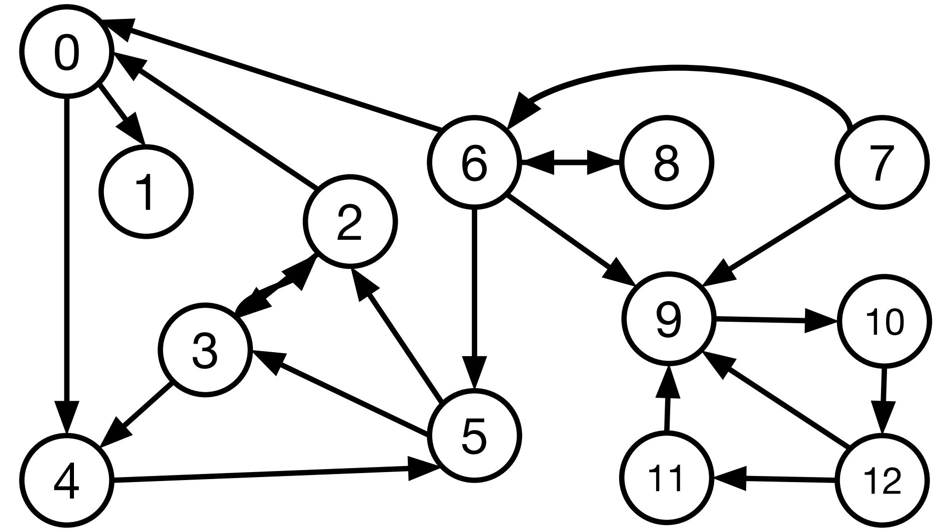
Darstellung

- G gerichteter Graph mit n Knoten und m Kanten.
- Darstellung. Wir brauchen die folgenden Operationen auf gerichteten Graphen.
  - PointsTo(v, u): bestimme, ob es eine Kante gibt, die von v nach u zeigt.
  - Neighbors(v): liefere alle Knoten u, zu denen v zeigt.
  - Insert(v, u): füge die Kante (v, u) zu G hinzu (sofern sie noch nicht da ist).



Adjazenzmatrix

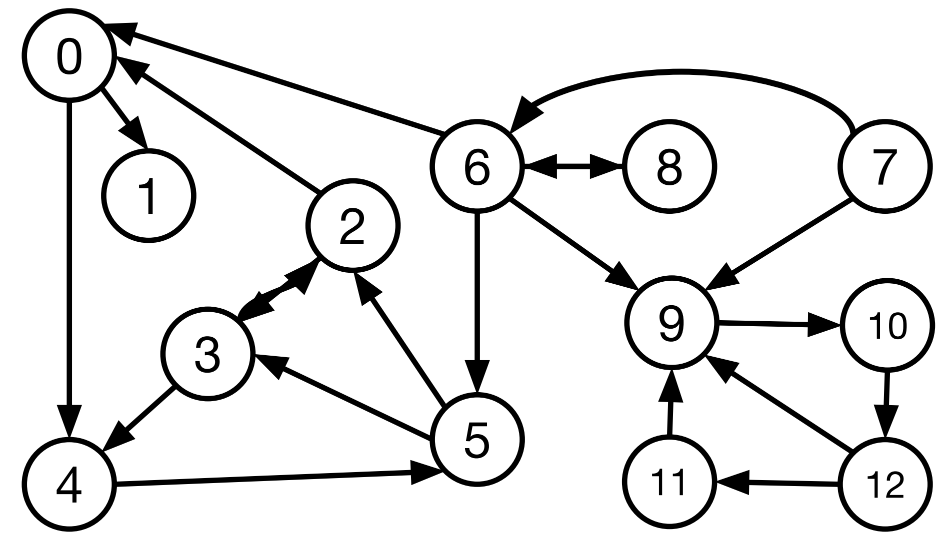
- Gerichteter Graph G
  mit n Knoten und m Kanten.
- Adjazenzmatrix.
  - 2D (n x n) Feld A.
  - A[i,j] = 1 wenn i nach j zeigt, 0 sonst.
- Platz. $O(n^2)$
- Zeit.
  - PointsTo in Zeit O(1).
  - Neighbors(v) in Zeit O(n).
  - Insert(v, u) in Zeit O(1).

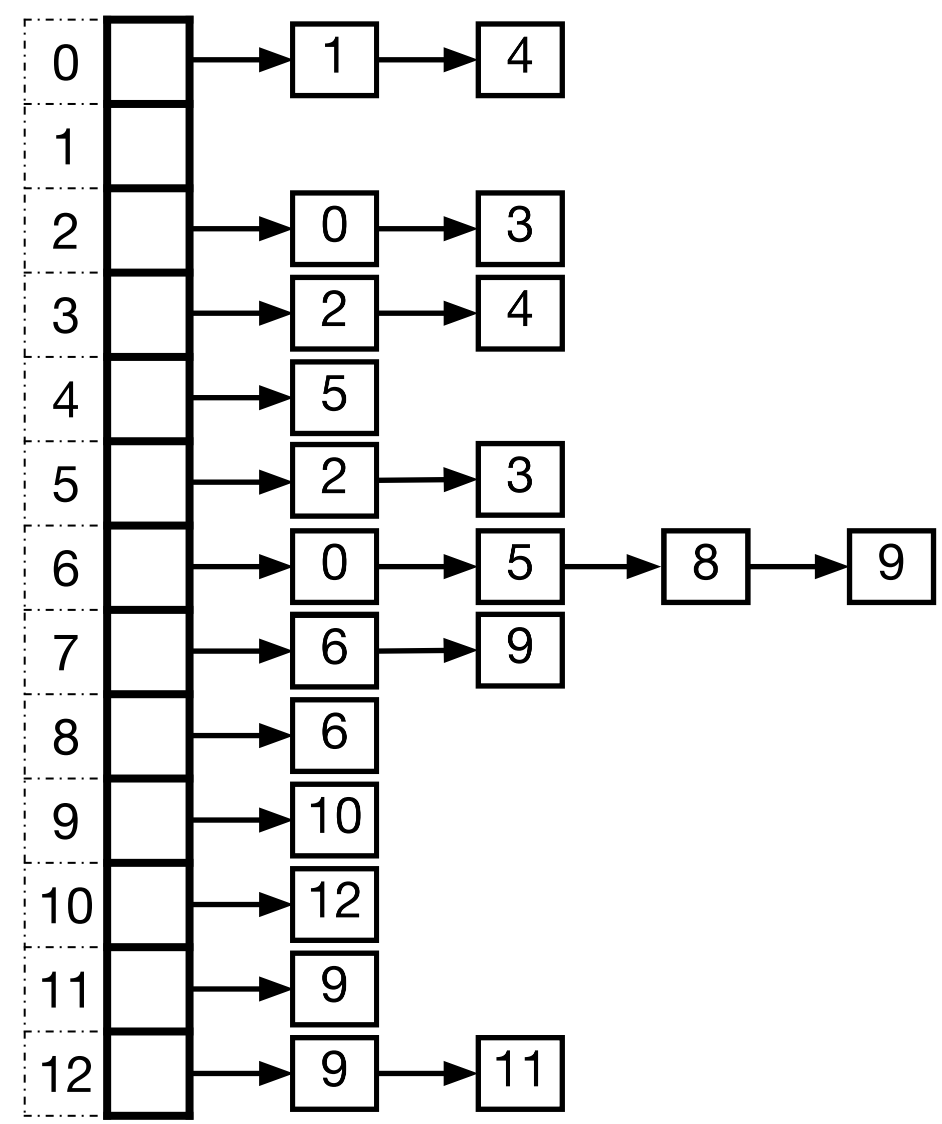


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Adjazenzliste

- Gerichteter Graph G mit n Knoten und m Kanten.
- Adjazenzliste.
  - Feld A[0..n-1].
  - A[i] ist eine verkettete Liste von allen Knoten, zu denen i zeigt.
- Platz. $O(n + \sum_{v \in V} \deg^+(v)) = O(n + m)$
- Zeit.
  - PointsTo, Neighbors und Insert in Zeit $O(\deg(v))$.





Darstellung

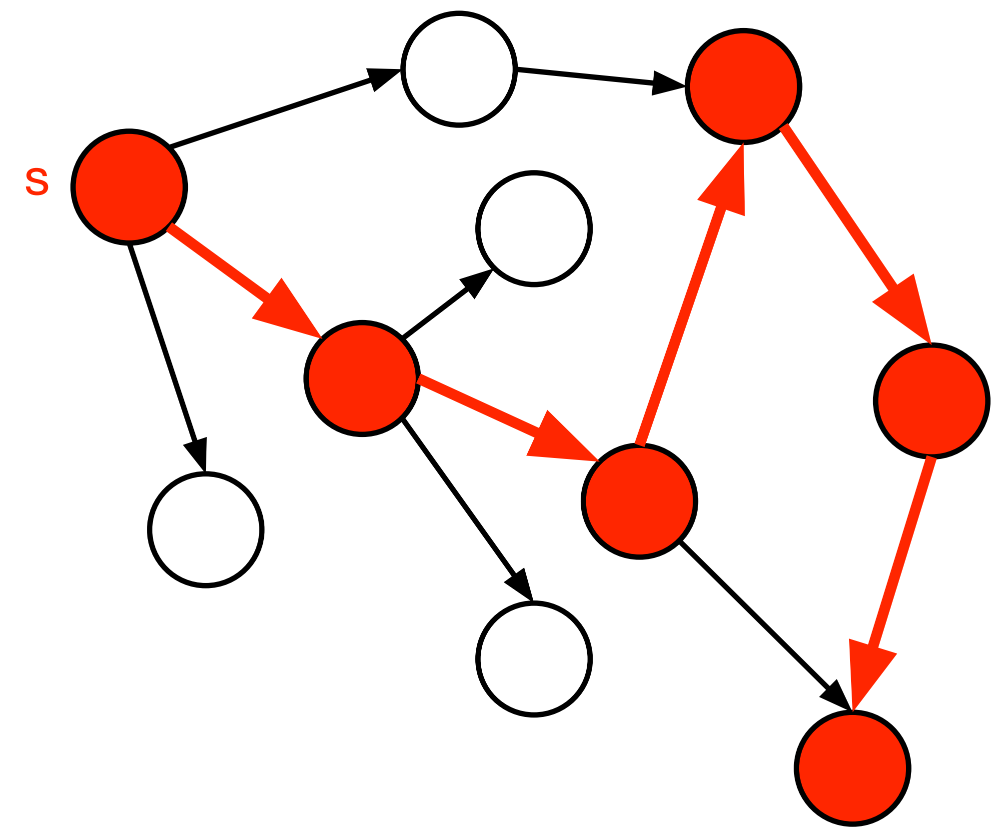
Datenstruktur	PointsTo	Neighbors	Insert	Platz
Adjazenzmatrix	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n^2)$
Adjazenzliste	$O(\deg^+(v))$	$O(\deg^+(v))$	$O(\deg^+(v))$	$O(n+m)$

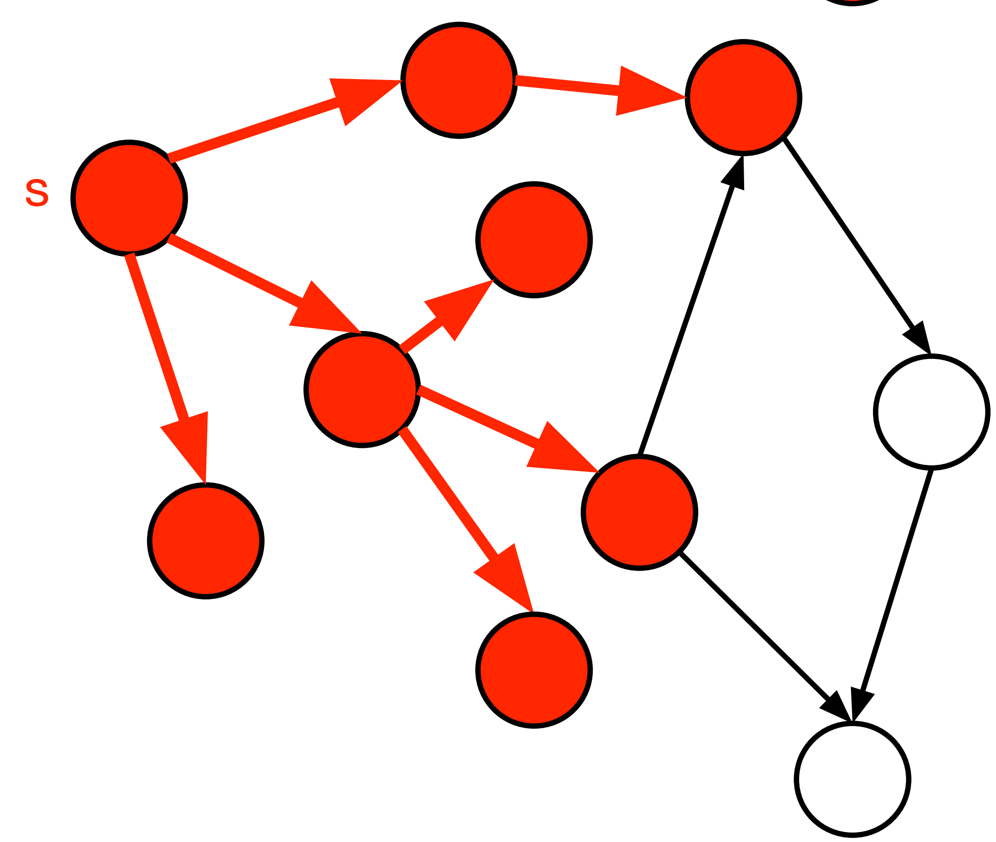
Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

Suche

- Tiefensuche von Knoten s.
  - Besuche s.
  - Um v zu besuchen:
    - Markiere v.
    - Besuche rekursiv alle unmarkierten Nachbarn, zu denen v zeigt.
- Breitensuche von Knoten s.
  - Initialisiere eine Warteschlange Q.
  - Markiere s und Q.ENQUEUE(s).
  - Solange Q nicht leer ist:
    - v = Q.DEQUEUE().
    - Für jeden unmarkierten Nachbarn u zu dem v zeigt:
      - Markiere u.
      - Q.ENQUEUE(u).
- Time. O(n + m)



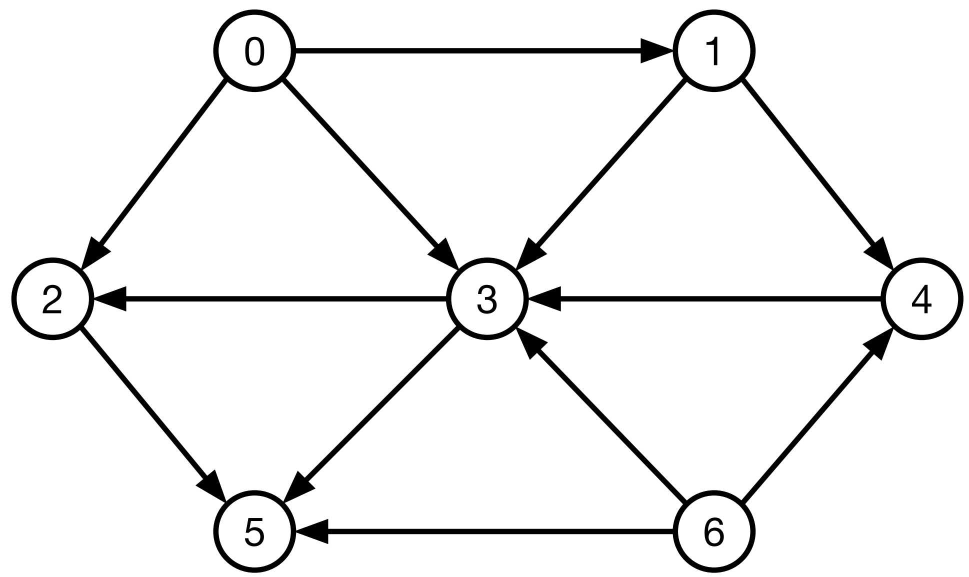


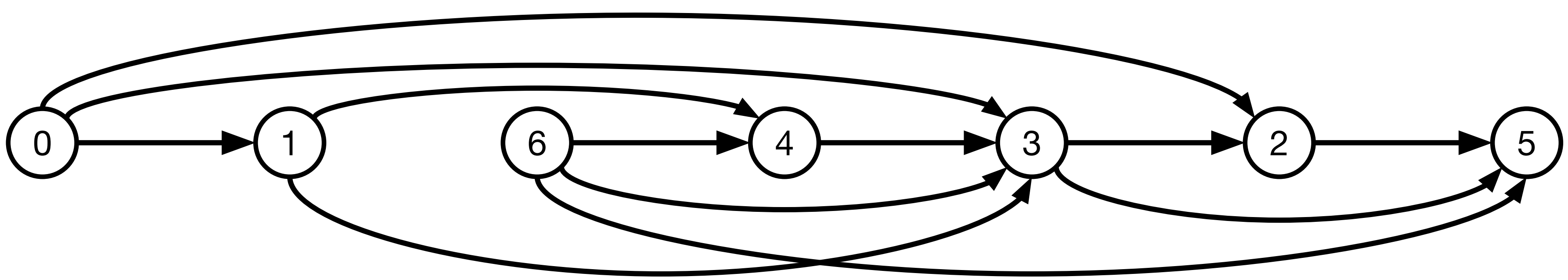
Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

Topologisches Sortieren

- Topologisches Sortieren. Sortiere die Knoten v_0, v_1, …, v_{n-1} von links nach rechts, sodass alle Kanten nach rechts zeigen.

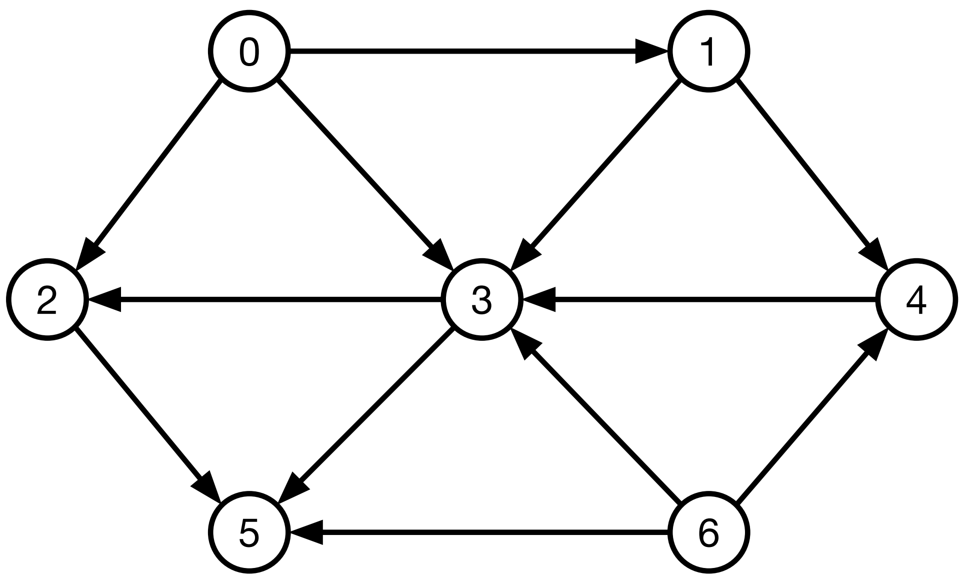


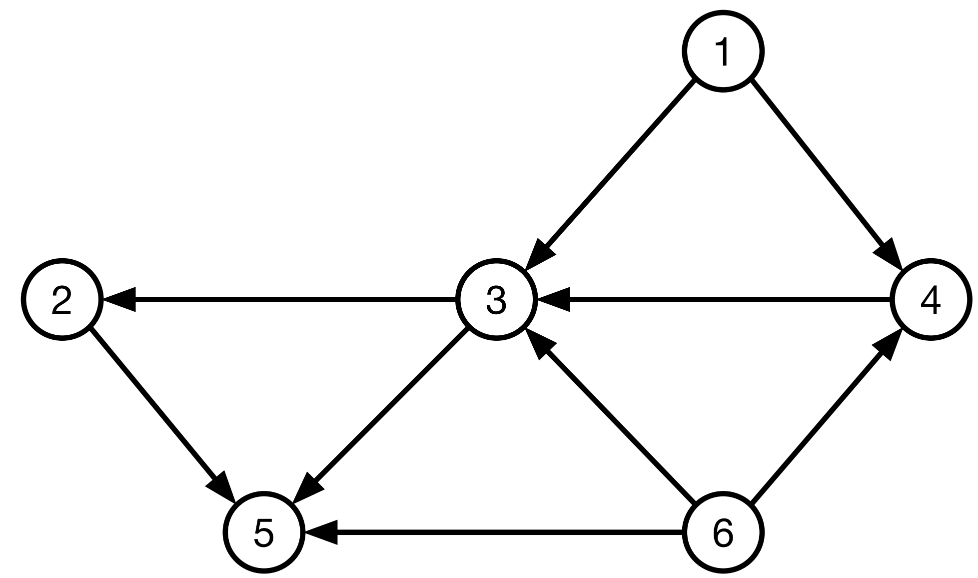


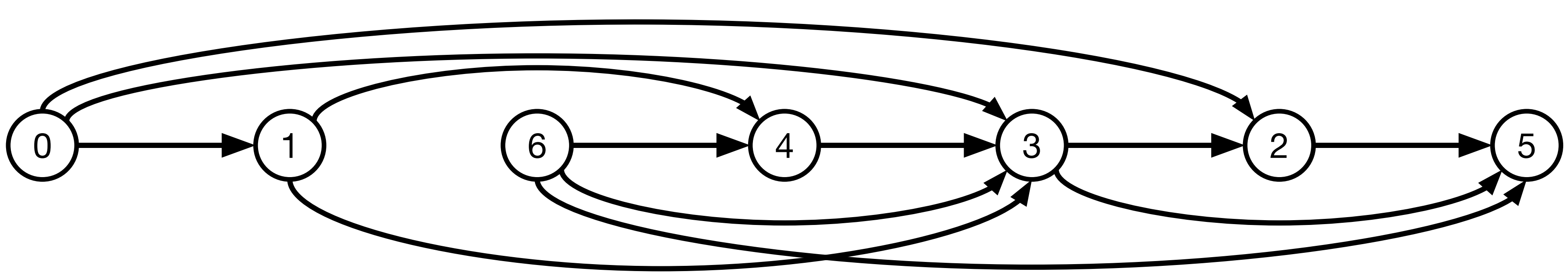
- Frage. Berechne eine Topologische Ordnung oder stelle fest, dass eine solche nicht existiert.

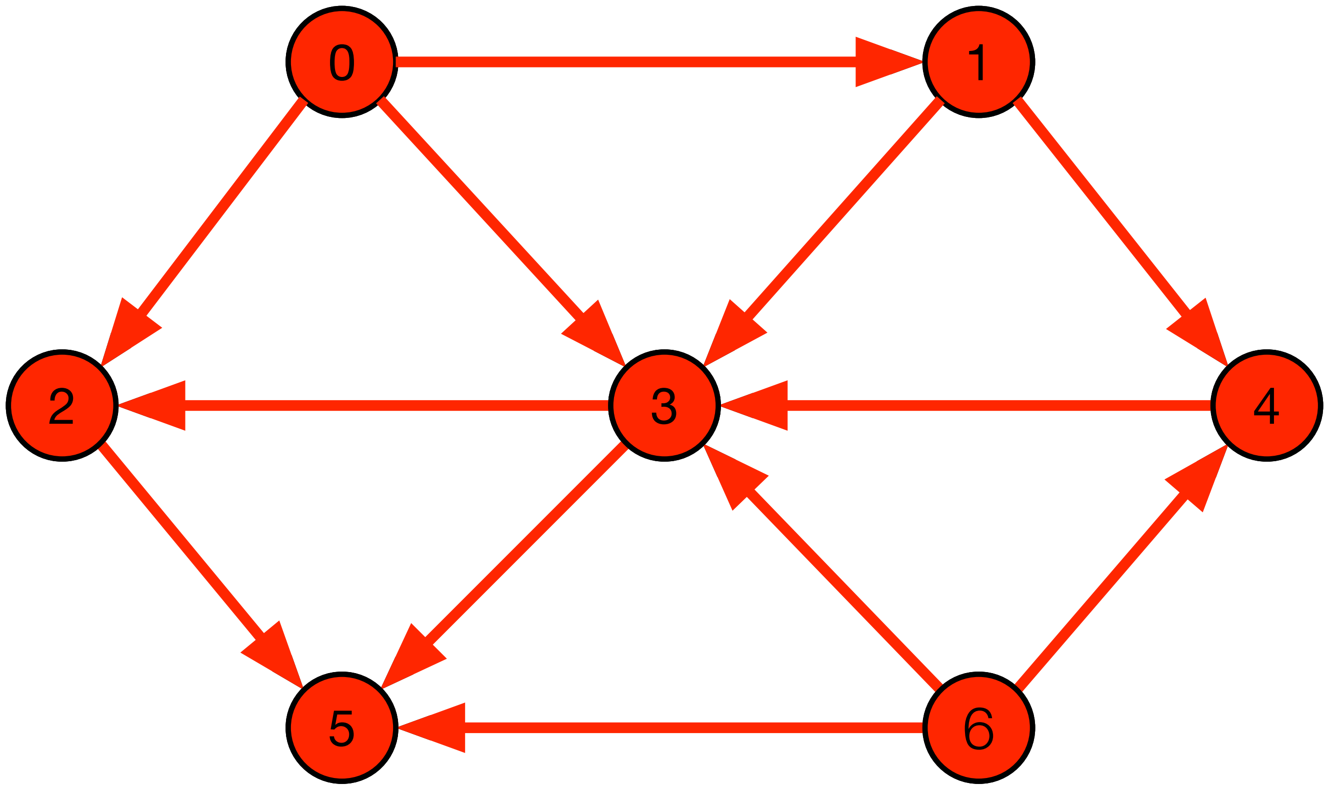
Topologisches Sortieren

- Rekursiver Algorithmus.
  - Finde v mit Eingangsgrad 0.
  - Gebe v aus und mache rekursiv auf G - {v} weiter.



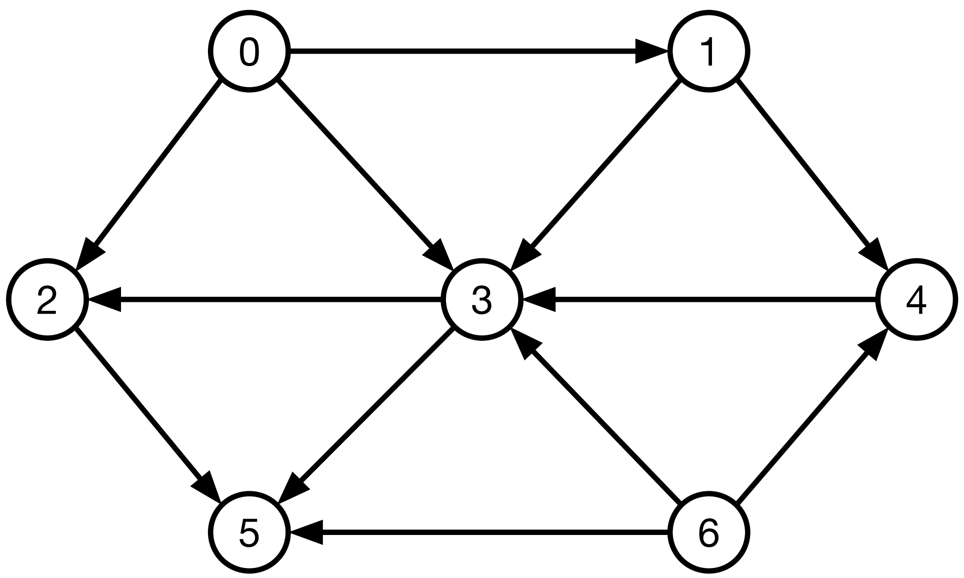


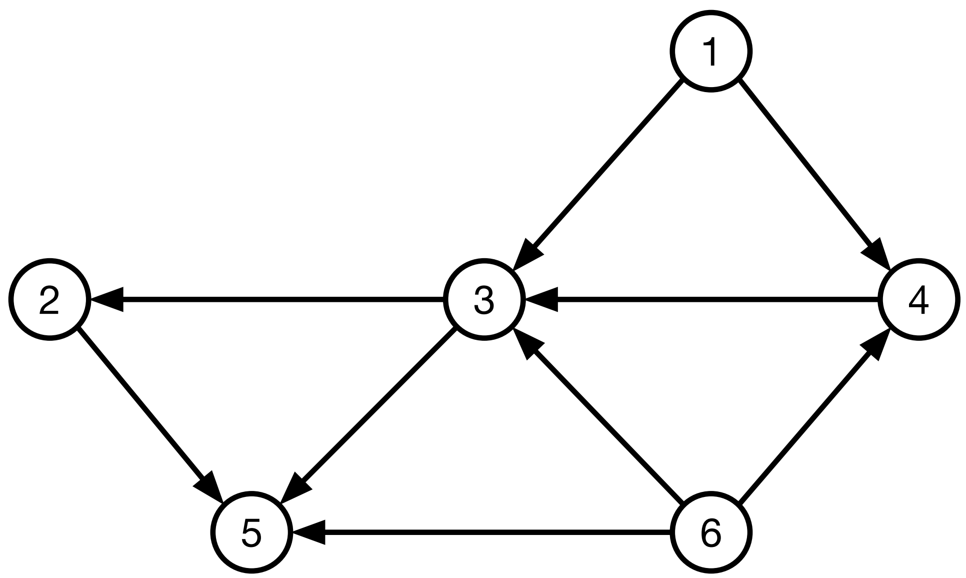


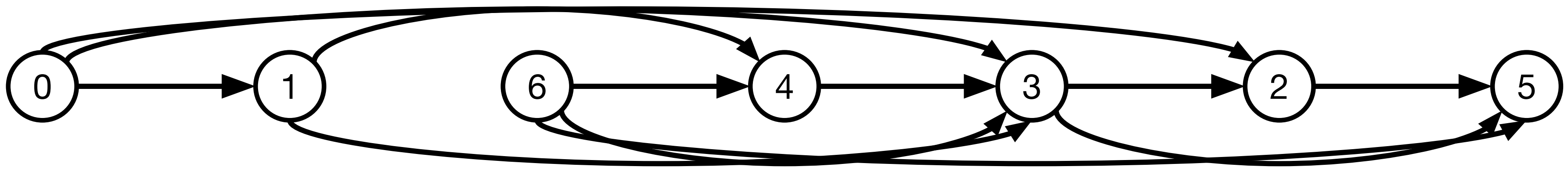

0
1
2
3
4
5
6

Topologisches Sortieren

- Korrektheit?
- Lemma. G hat topologische Ordnung
  ⟺ G hat Knoten v mit Eingangsgrad 0 und G - {v} hat topologische Ordnung.

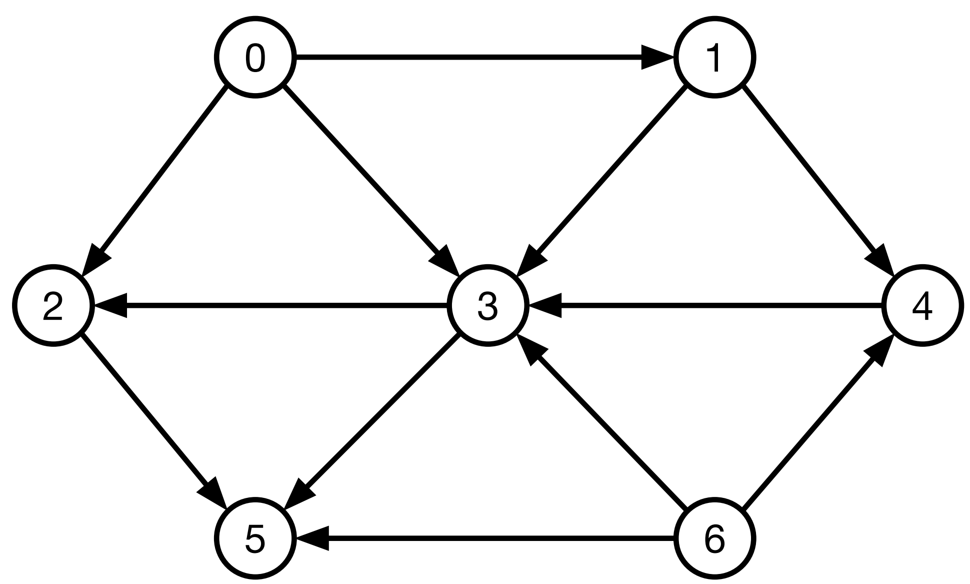


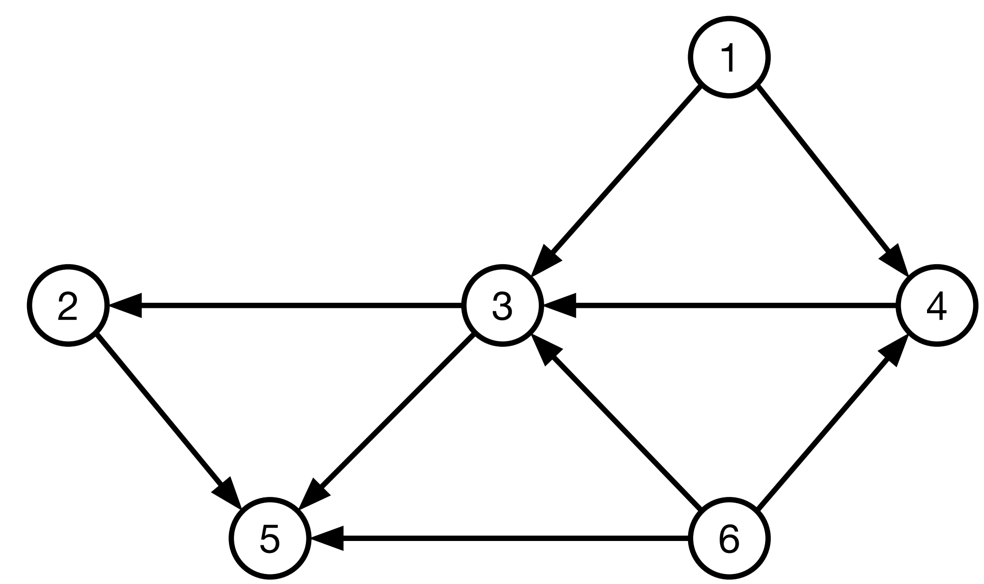


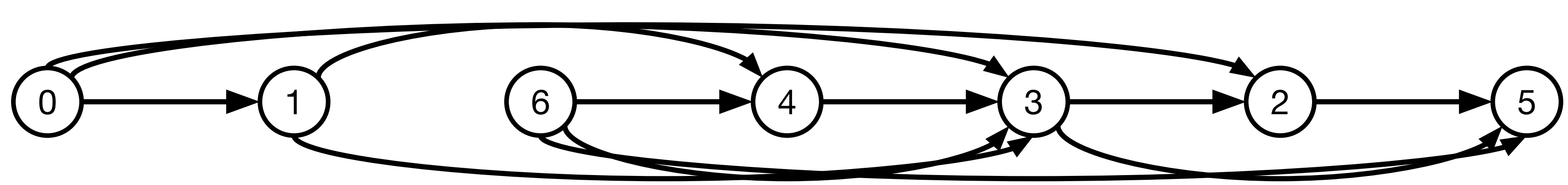


Topologisches Sortieren

- Frage. Wie implementiert man den Algorithmus effizient, wenn der Graph als Adjazenzliste dargestellt ist?

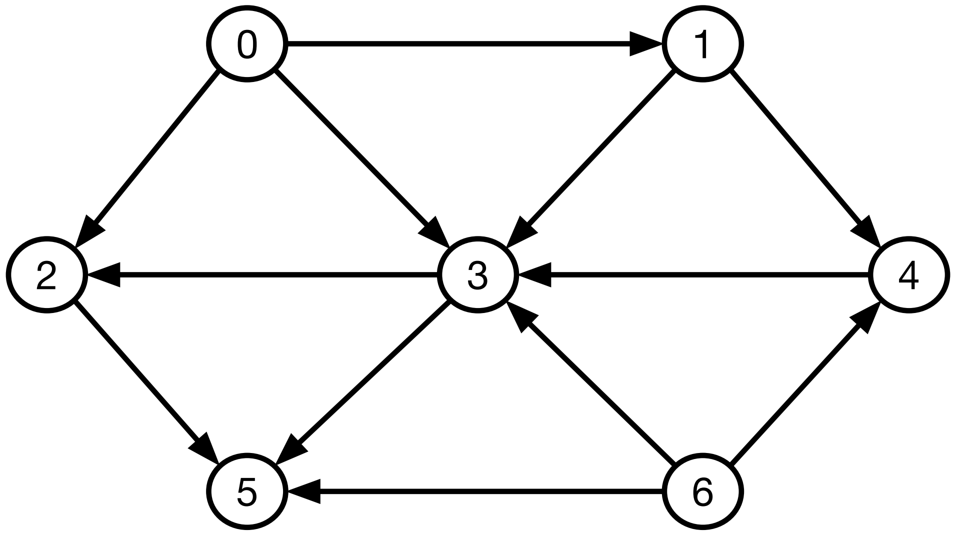






Topologisches Sortieren

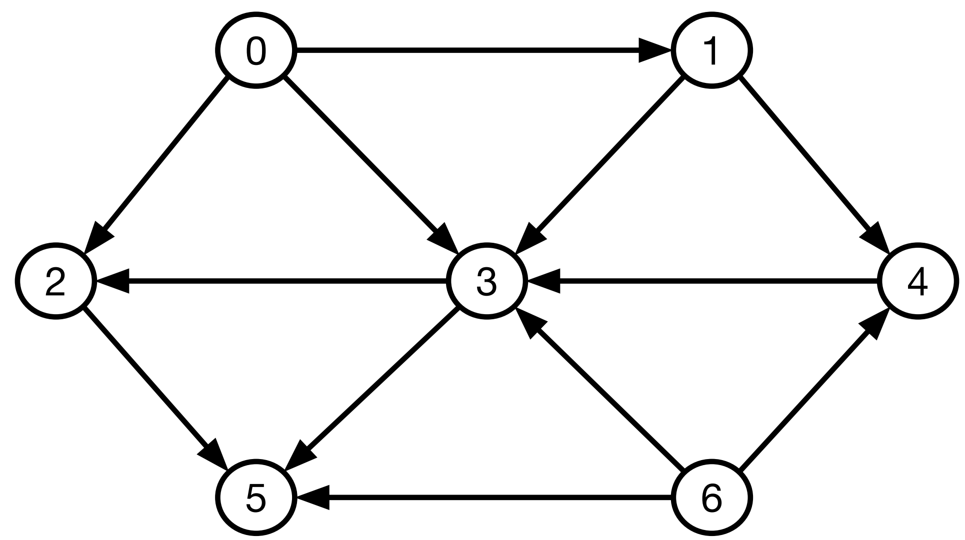
- Lösung 1. Konstruiere reversierten Graph G^R.
  - Suche in Adjazenzlisten von G^R nach einem Knoten v, der in G keine eingehenden Kanten hat.
  - Entferne v und an v inzidente Kanten.
  - Lege v ganz nach links.
  - Wiederhole.

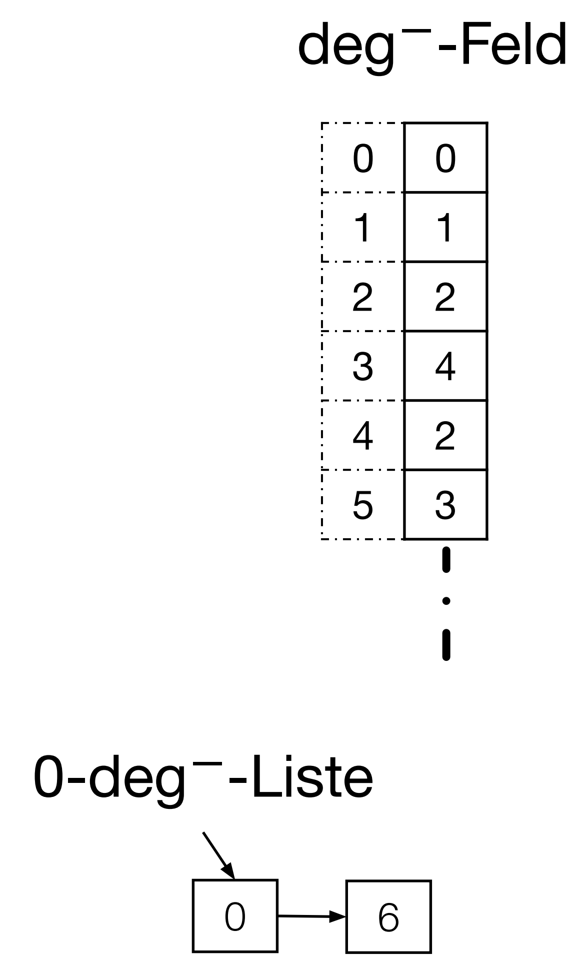


- Zeit pro Knoten.
  - Finde Knoten v mit $\deg^-(v)=0$: $O(n)$.
  - Entferne an v inzidente Kanten: $O(\deg^+(v)\, n)$.
- Gesamtzeit. $O(n^2 + \sum_{v \in V} \deg^+(v)\, n) = O(n^2 + mn) = O(n^3)$.

Topologisches Sortieren

- Lösung 2. Verwalte Ein-Grad jedes Knoten als Feld und verkettete Liste aller Knoten mit Ein-Grad 0.
  - Finde Knoten v mit Ein-Grad 0.
  - Entferne v und alle Kanten (v,*); aktualisiere Feld.
  - Lege v ganz nach links.
  - Wiederhole.





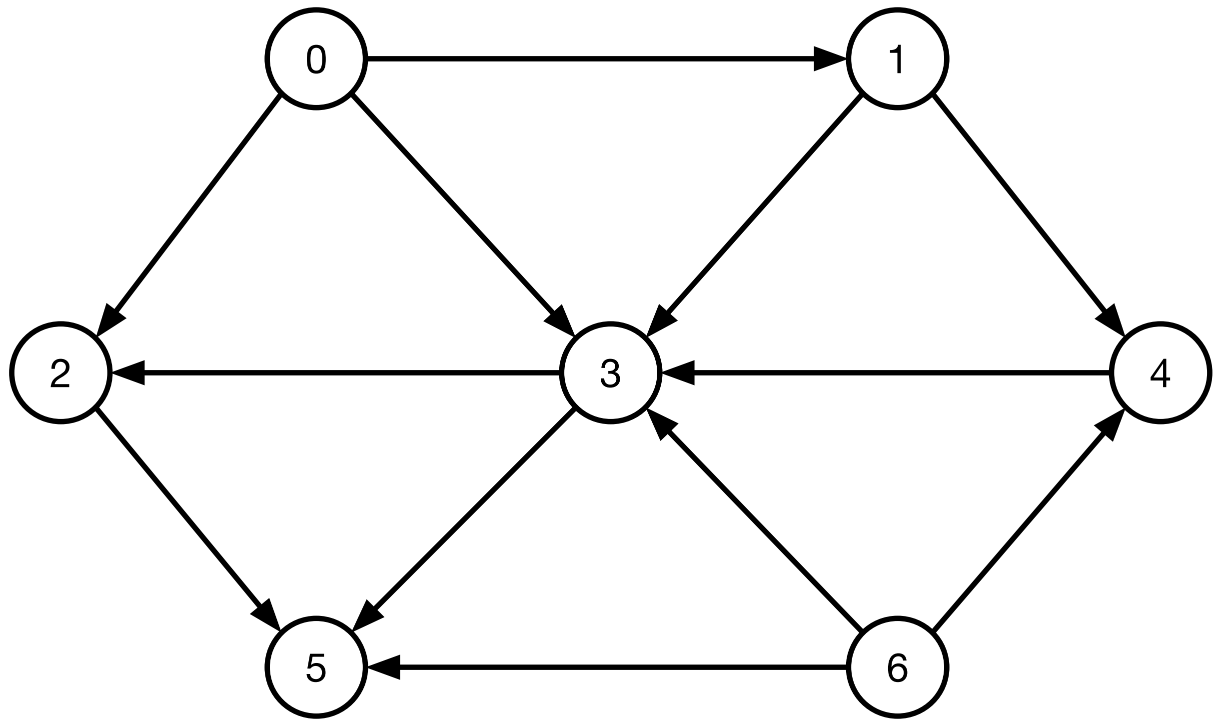
- Initialisierung. O(n + m)
- Zeit pro Knoten.
  - Entferne Knoten v mit Ein-Grad 0: O(1).
  - Entferne Kanten (v,*): $O(\deg^+(v))$
- Gesamtzeit. $O(n + \sum_{v\in V} \deg^+(v)) = O(n + m)$.

Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

- Directed acyclic graph (DAG). G ist azyklisch, wenn er keine (gerichteten) Kreise enthält.



- Algorithmisches Problem. Bestimme, ob G azyklisch ist.
- Äquivalenz zu topologischem Sortieren.

  G ist azyklisch $\Leftrightarrow$ G hat eine topologische Ordnung (siehe Übungen).

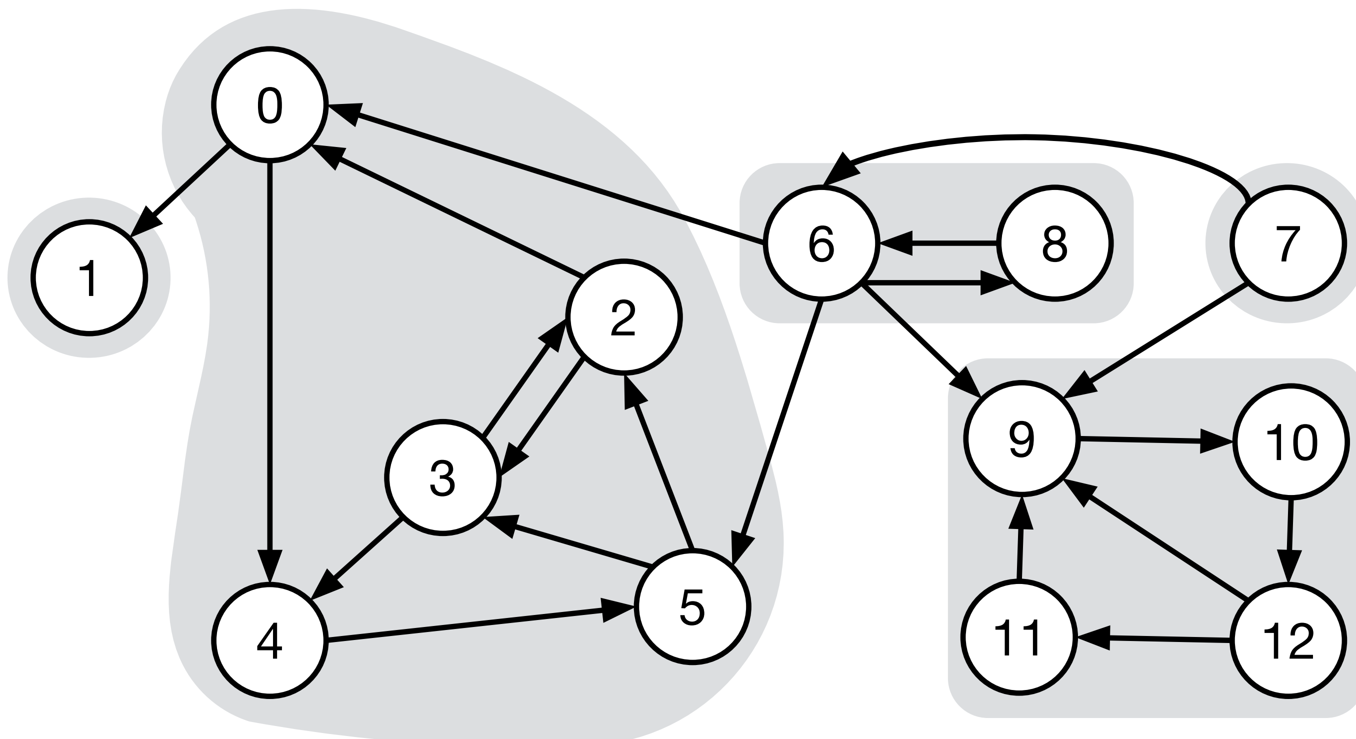
- Algorithmus.
  - Berechne eine topologische Ordnung.
  - Wenn erfolgreich, gib ja aus, sonst nein.
- Zeit. $O(n+ m)$

Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

Starke Zusammenhangskomponenten

- Def. v und u sind stark zusammenhängend wenn es einen Weg von v nach u und einen Weg von u nach v gibt.
- Def. Eine starke Zusammenhangskomponente ist eine maximale Teilmenge von stark zusammenhängenden Knoten.



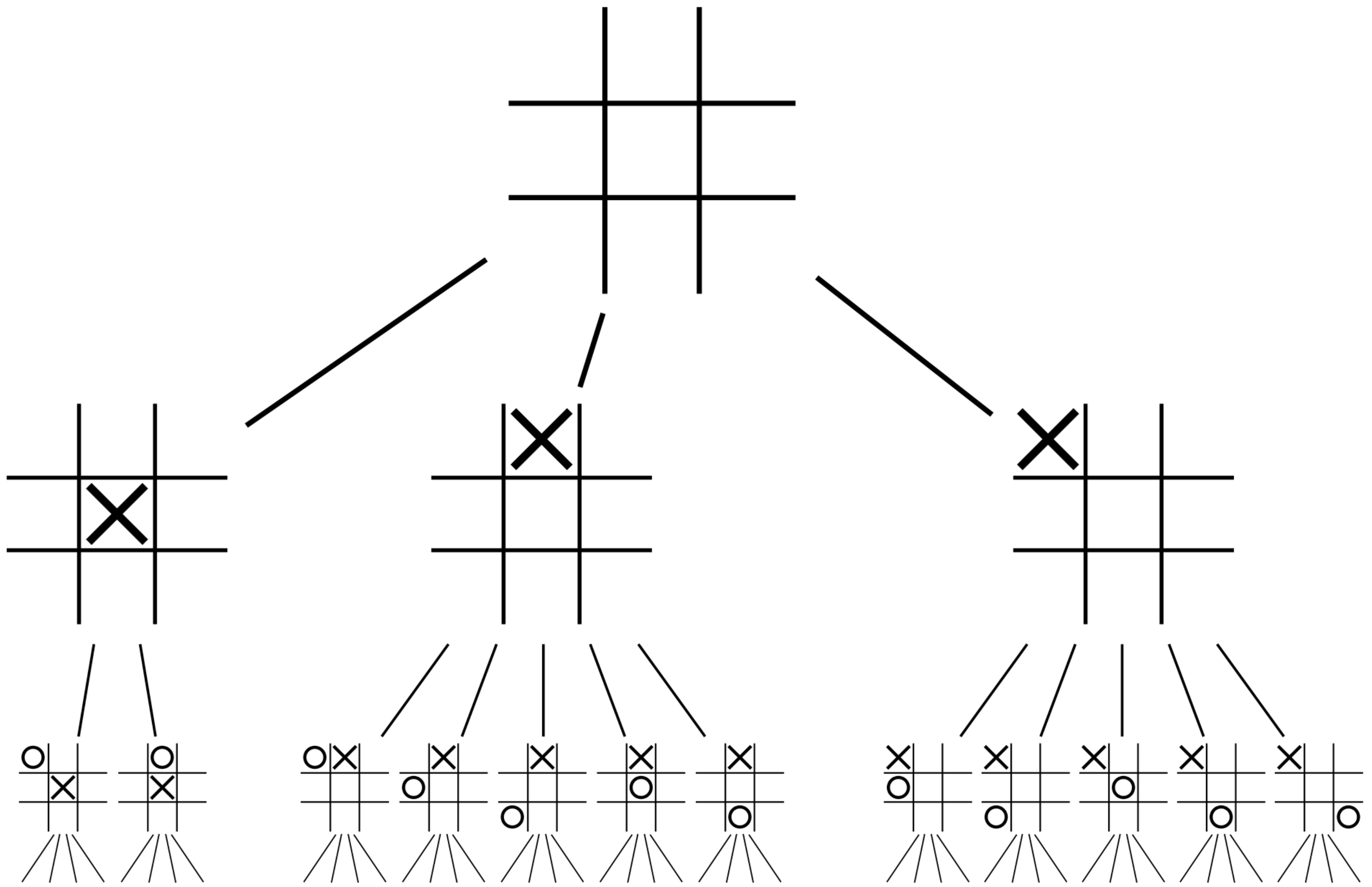
- Satz. Wir können die starken Zusammenhangskomponenten eines Graphen in Zeit O(n + m) ausrechnen.
- Siehe CLRS 22.5.

Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen

Implizite Graphen

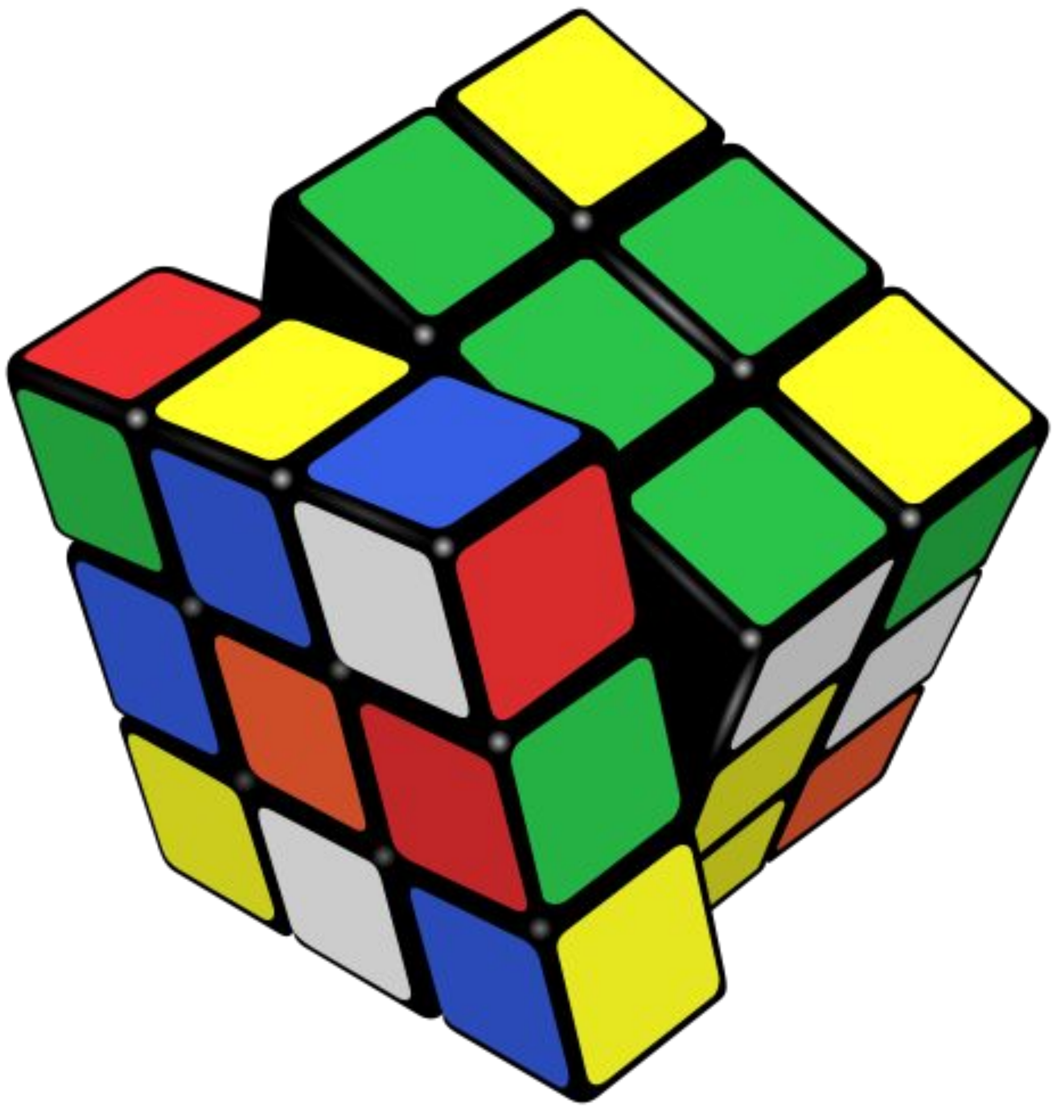
- Impliziter Graph. Graph mit impliziter Darstellung.
- Implizite Darstellung.
  - Startknoten s und Algorithmus um Nachbarn eines Knoten zu berechnen.
- Anwendungen. Spiele, KI, usw.



Implizite Graphen

- Rubikswürfel
  - n+m = 43.252.003.274.489.856.000 ~ 43 Billionen.
- Was ist die kleinste Anzahl an Zügen, um den Würfel von jeder Startkonfiguration zu lösen?

Jahr	untere Schranke	obere Schranke
1981	18	52
1990	18	42
1992	18	39
1992	18	37
1995	18	29
1995	20	29
2005	20	28
2006	20	27
2007	20	26
2008	20	25
2008	20	23
2008	20	22
2010	20	20



Gerichtete Graphen

- Gerichtete Graphen
- Darstellung
- Suche
- Topologisches Sortieren
- Gerichtete azyklische Graphen
- Starke Zusammenhangskomponenten
- Implizite Graphen