Algorithmen und Datenstrukturen 2

ALGO2 · WiSe-2021/22 · tcs.uni-frankfurt.de/algo2 · 2021-12-06 · *1456d34*

Übungen zu Woche 8: Hartnäckigkeit II

Das Übungsblatt enthält alle empfohlenen Lernaktivitäten für die aktuelle Woche.

- **Heimarbeit bis Montag 17:00.**
  - Schau die Videos an und lies die Buchkapitel.
  - Bearbeite die 🌱-Aufgabe in Moodle. (Feste Abgabefrist!)
  - Lese den Aufgabentext aller Übungsaufgaben.
- **Heimarbeit.** Bearbeite die Übungsaufgaben soweit möglich. Probier zumindest alle mal!
- **Dienstag/Donnerstag.**
  - **8:00–8:15.** Besprechung im Hörsaal.
  - **8:15–9:15.** Bearbeite jetzt die Übungen, die du noch nicht lösen konntest. Sprich mit anderen Studis! Frag das Vorlesungsteam um Hilfe!
  - **9:15–9:45.** Lösungsspaziergang zu den Aufgaben für heute.
- **Heimarbeit bis Freitag, den 10.12., 17:00.** Gib deine Lösungen zu der ⭐-Aufgabe von diesem Übungsblatt in Moodle ab. (Feste Abgabefrist!)

Dienstag

Aufgabe 8.1 (k-COLOR).

> k-Color:
> Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Können alle Knoten $v \in V$ mit k Farben so gefärbt werden, dass jede Kante inzident zu zwei Knoten unterschiedlicher Farbe ist?

a) Beschreibe eine polynomielle Reduktion von 3Color zu 4Color.

b) Zeige, dass k-Color für jedes $k \geq 3$ NP-hart ist.

Aufgabe 8.2 (NP-Härte). Du darfst annehmen, dass das Hamiltonpfadproblem auch in ungerichteten Graphen NP-hart ist. Zeige, dass die folgenden Probleme NP-hart sind.

a) Gegeben sei ein ungerichteter Graph G. Enthält G einen einfachen Pfad, der alle außer 247 Knoten besucht?

b) Gegeben sei ein ungerichteter Graph G. Enthält G einen Spannbaum, in dem jeder Knoten einen Grad von höchstens 198 hat?

c) Gegeben sei ein ungerichteter Graph G. Enthält G einen Spannbaum mit höchstens 350 Blättern?

Donnerstag

Aufgabe 8.3 (Ressourcenmanagement). Ein Unternehmen verwaltet High-Performance Echtzeitsysteme mit asynchronen Prozessen, die auf gemeinsame Ressourcen zugreifen müssen. Das System hat eine Menge von n Prozessen und eine Menge von m Ressourcen. Zu jedem Zeitpunkt spezifiziert ein Prozess eine Menge an Ressourcen, die er benutzen möchte. Jede Ressource kann gleichzeitig von mehreren Prozessoren angefragt werden, aber es kann zu jedem Zeitpunkt nur *genau* ein Prozess auf die Ressource zugreifen.

Deine Aufgabe ist es, die Ressourcen an die Prozesse zu verteilen. Wenn ein Prozess alle benötigten Ressourcen zugeteilt bekommt, ist er *aktiv*, ansonsten ist er *blockiert*. Eine effiziente Zuweisung der Ressourcen sorgt dafür, dass möglichst viele Prozesse *aktiv* sind, was sich als das Problem RessourcenReservieren ausdrücken lässt.

> RessourcenReservieren:
> Es sei eine Menge von n Prozessen, eine Menge von m Ressourcen und eine Zahl k gegeben. Ist es möglich, die Ressourcen den Prozessen so zuzuweisen, dass mindestens k Prozesse *aktiv* sind?

Gib für jedes Problem auf der folgenden Liste entweder einen Polynomialzeit-Algorithmus an oder zeige, dass das Problem NP-vollständig ist.

a) RessourcenReservieren.
b) RessourcenReservieren mit dem Spezialfall $k = 2$.
c) RessourcenReservieren mit zwei Typen von Ressourcen. Hierbei sind die Ressourcen: Mensch und Maschine. Jeder Prozess benötigt höchstens eine Ressource von jedem Typ. (Anders ausgedrückt braucht jeder Prozess einen bestimmten Menschen und eine bestimmte Maschine.)
d) RessourcenReservieren mit dem Spezialfall, dass jede Ressource von maximal zwei Prozessen angefragt wird.

Aufgabe 8.4 (Doppel-Färbung). Eine Doppel-Färbung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ weist jedem Knoten $v \in V$ eine Menge von zwei unterschiedlichen Farben $\{f_1, f_2\} \in F$ zu. Es gibt zwei Arten der Doppel-Färbung:

- In einer *schwachen* Doppel-Färbung (siehe Abbildung 1) müssen die zu jeder Kante inzidenten Knoten verschiedene Farbmengen besitzen. Die beiden Mengen dürfen sich aber eine Farbe teilen.
- In einer *starken* Doppel-Färbung (siehe Abbildung 2) müssen die zu jeder Kante inzidenten Knoten komplett unterschiedliche Farbmengen haben. Das heißt, eine Kante ist inzident zu 4 Farben.

Jede starke Doppel-Färbung ist auch eine schwache Doppel-Färbung.

a) Zeige, dass es NP-hart ist, für einen gegebenen ungerichteten Graphen G die minimale Anzahl an Farben in einer schwachen Doppel-Färbung zu finden.
b) Zeige, dass es NP-hart ist, für einen gegebenen ungerichteten Graphen G die minimale Anzahl an Farben in einer starken Doppel-Färbung zu finden.

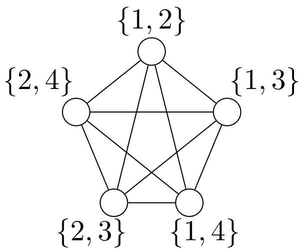

Abbildung 1: Eine schwache Doppel-Färbung.

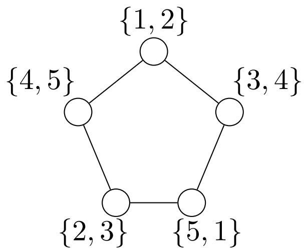

Abbildung 2: Eine starke Doppel-Färbung.

Sternaufgabe

Aufgabe 8.5 (⭐: Vorsichtige Färbung). Eine 5-Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ weist jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ zu, sodass die Knoten $u, v \in V$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ unterschiedliche Farben haben. Eine 5-Färbung ist *vorsichtig*, wenn die Farben adjazenter Knoten sich Modulo 5 um mindestens 2 unterscheiden (z.B. darf die Farbe 0 darf nur zu den Farben 2 und 3 adjazent sein). Zeige, dass das Entscheidungsproblem, ob ein gegebener Graph eine vorsichtige 5-Färbung besitzt, NP-hart ist.

Tipp: Benutze für die Reduktion das normale 5-Färbung-Problem.

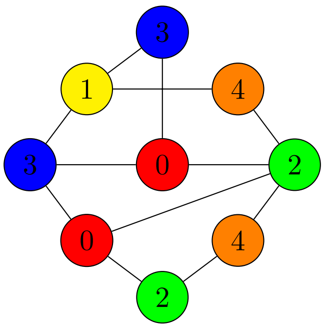

Abbildung 3: Ein Beispiel für eine vorsichtige 5-Färbung.