Algorithmen und Datenstrukturen 2

ALGO2 · WiSe-2021/22 · tcs.uni-frankfurt.de/algo2 · 2022-01-21 · *7ae7db8*

Übungen zu Woche 11: Berechenbarkeit

Das Übungsblatt enthält alle empfohlenen Lernaktivitäten für die aktuelle Woche.

- **Heimarbeit bis Montag 17:00.**
  - Schau die Videos an und lies die Buchkapitel.
  - Bearbeite die 🌱-Aufgabe in Moodle. (Feste Abgabefrist!)
  - Lese den Aufgabentext aller Übungsaufgaben.
- **Heimarbeit.** Bearbeite die Übungsaufgaben soweit möglich. Probier zumindest alle mal!
- **Dienstag/Donnerstag.**
  - **8:00–8:15.** Besprechung im Hörsaal.
  - **8:15–9:15.** Bearbeite jetzt die Übungen, die du noch nicht lösen konntest. Sprich mit anderen Studis! Frag das Vorlesungsteam um Hilfe!
  - **9:15–9:45.** Lösungsspaziergang zu den Aufgaben für heute.
- **Heimarbeit bis Freitag, den 21.01., 17:00.** Gib deine Lösungen zu der ⭐-Aufgabe von diesem Übungsblatt in Moodle ab. (Feste Abgabefrist!)

Dienstag

Zur Erinnerung:

- $\textsc{Accept}(M) := \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$
- $\textsc{Reject}(M) := \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ verwirft } w\}$
- $\textsc{Halt}(M) := \textsc{Accept}(M) \cup \textsc{Reject}(M)$
- $\textsc{Diverge}(M) := \Sigma^* \setminus \textsc{Halt}(M)$

Aufgabe 11.1 (Turingmaschinen). Sei M eine beliebige Turingmaschine.

a) Beschreibe eine Turingmaschine M^R, sodass:

$$\textsc{Accept}(M^R) = \textsc{Reject}(\mathrm{M}) \qquad \text{und} \qquad \textsc{Reject}(M^R) = \textsc{Accept}(M)$$

b) Beschreibe eine Turingmaschine M^A, sodass:

$$\textsc{Accept}(M^A) = \textsc{Accept}(M) \qquad \text{und} \qquad \textsc{Reject}(M^A) = \emptyset$$

c) Beschreibe eine Turingmaschine M^H, sodass:

$$\textsc{Accept}(M^H) = \textsc{Halt}(M) \qquad \text{und} \qquad \textsc{Reject}(M^H) = \emptyset$$

Aufgabe 11.2 (Entscheidbarkeit I). Beweise für jede der folgenden vier Sprachen, dass sie unentscheidbar ist:

a) $\textsc{Halt} := \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } w\}$
b) $\textsc{Diverge} := \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ hält nicht auf Eingabe } w\}$
c) $\textsc{NeverHalt} := \{\langle M\rangle \mid \textsc{Halt}(M) = \emptyset\}$
d) $\textsc{AlwaysHalt} := \{\langle M\rangle \mid \textsc{Halt}(M) = \Sigma^*\}$

Donnerstag

Aufgabe 11.3 (Entscheidbarkeit II). Argumentiere für jedes der folgenden Entscheidungsprobleme, dass es unentscheidbar ist.

a) Für ein als Eingabe gegebenes Python-Programm `fib.py` wollen wir verifizieren, ob `fib.py` ein korrektes Programm für die Fibonacci-Zahlen ist, also ob `fib.py` bei Eingabe n die n-te Fibonacci-Zahl ausgibt.
b) Kann ein als Eingabe gegebenes Python-Programm `p.py` in eine Endlosschleife gelangen?
c) Berechnen zwei als Eingabe gegebene Python-Programme, `p1.py` und `p2.py`, die gleiche Funktion?

Aufgabe 11.4 (Entscheidbarkeit III). Entwerfe für jedes der folgenden Entscheidungsprobleme entweder einen Algorithmus oder beweise, dass das Problem unentscheidbar ist. Die Eingabe ist für jedes Entscheidungsproblem die Kodierung $\langle M \rangle$ einer Turingmaschine M.

a) Akzeptiert M die Eingabe $\langle M \rangle \langle M \rangle$?
b) Akzeptiert M alle Palindrome?
c) Akzeptiert M die Sprache $\{\langle M \rangle \mid M$ hat min. 100 Zustände und hält auf Eingabe $\langle M \rangle\}$?
d) Gibt es einen Eingabestring, der M zu einer Bewegung nach links zwingt?

Aufgabe 11.5 (Entscheidbarkeit IV). Entwerfe für jedes der folgenden Entscheidungsprobleme entweder einen Algorithmus oder beweise, dass das Problem unentscheidbar ist. Die Eingabe ist für jedes Entscheidungsproblem die Kodierung $\langle M, w \rangle$ einer Turingmaschine M und ihrem Eingabestring w.

a) Akzeptiert M entweder w oder w^R?
b) Akzeptiert M die Eingabe w in höchstens $2^{|w|}$ Schritten?
c) Wenn M auf der Eingabe w ausgeführt wird, gelangt M jemals wieder in den Startzustand?

Sternaufgabe

Aufgabe 11.6 (⭐: Unentscheidbarkeit).

a) Zeige über eine Reduktion ausgehend von der Sprache Accept, dass die Sprache

$$L_1 = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine deterministische Turingmaschine} \\ \text{und } M \text{ durchläuft Zustand 1 für Eingabe } w \end{array} \right\}$$

nicht entscheidbar ist.

b) Zeige unter Anwendung des Satzes von Rice, dass die folgende Sprache nicht entscheidbar ist. Begründe die Nicht-Trivialität der Menge S.

$$L_2 = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine deterministische Turingmaschine} \\ \text{und } |L(M)| \leq 2. \end{array} \right\}$$

Hierbei ist $L(M)$ die von der deterministischen Turingmaschine M akzeptierte Sprache.