Algorithmen und Datenstrukturen 2

ALGO2 · WiSe-2021/22 · tcs.uni-frankfurt.de/algo2 · 2022-01-27 · *f5d6577*

Übungen zu Woche 12: Lineare Programmierung I

Das Übungsblatt enthält alle empfohlenen Lernaktivitäten für die aktuelle Woche.

- **Heimarbeit bis Montag 17:00.**
  - Schau die Videos an und lies die Buchkapitel.
  - Bearbeite die 🌱-Aufgabe in Moodle. (Abgabefrist: Mittwoch 17:00!)
  - Bearbeite die Übungsaufgaben soweit möglich. Probier zumindest alle mal!
- **Dienstag/Donnerstag.**
  - **8:00–8:15.** Besprechung in Zoom.
  - **8:15–9:15.** Bearbeite jetzt die Übungen, die du noch nicht lösen konntest. Sprich mit anderen Studis! Frag das Vorlesungsteam auf Discord um Hilfe!
  - **9:15–9:45.** Lösungsspaziergang zu den Aufgaben für heute in Zoom.
- **Heimarbeit bis Freitag, den 04.02., 17:00.** Gib deine Lösungen zu der ⭐-Aufgabe von diesem Übungsblatt in Moodle ab. (Feste Abgabefrist!)

Dienstag

Aufgabe 12.1 (Lösungsmenge eines LPs). Betrachte das folgende LP.

$$\begin{array}{rrl} \max & 2x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq 8 \\ & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 7 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) Zeichne das korrespondierende Polytop P.

b) Finde grafisch eine optimale fraktionale und eine optimale ganzzahlige Lösung.

c) Addiert man die erste Nebenbedingung, multipliziert mit $p_1 = 1$, zu der zweiten Nebenbedingung, multipliziert mit $p_2 = 1$, und zu der dritten Nebenbedingung, multipliziert mit $p_3 = 1.5$, dann erhält man

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1.5 \cdot 7 = 22.5.$$

Finde nicht-negative Werte für p_1, p_2, p_3, sodass man, wenn man wie oben vorgeht, $2x_1 + 5x_2 \leq \mathit{opt}$ für jedes $x \in P$ erhält, wobei *opt* einer der in Aufgabenteil b) bestimmten optimalen Werte ist.

Aufgabe 12.2 (Standardform). Betrachte das folgende LP.

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq 50 \\
& 3x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 & \leq 300 \\
& 18x_1 & & & + & x_3 & \leq 40 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

a) Überführe das LP in seine Standardform, indem du für jede der Gleichungen Schlupfvariablen (*slack variables*) s_1, s_2, s_3 einführst.
b) Zähle alle zulässigen (*feasible*) Basen für das LP auf.

Aufgabe 12.3 (Single-Source Shortest Path LP). Das *Single-Source Shortest Path Problem* kann, mit einer Variable d_v für jeden Knoten $v \neq s$ im Input-Graphen, als LP formuliert werden:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & \sum_v d_v & \\
\text{s.t.} & d_v & \leq l_{s\to v} \\
& d_v - d_u & \leq l_{u\to v} \\
& d_v & \geq 0
\end{array}
$$

Beschreibe das Verhalten des Simplex-Algorithmus auf diesem linearen Programm in Bezug auf die Distanzen. Nimm an, dass die Kantengewichte $l_{u\to v}$ nicht-negativ sind und dass ein eindeutiger kürzester Pfad zwischen zwei beliebigen Knoten im Graphen existiert.

a) Was sind die Basen dieses linearen Programms? Was ist eine zulässige (*feasible*) Basis? Was ist eine lokal optimale Basis?
b) Zeige, dass in einer optimalen Basis jede Variable d_v den gleichen Wert hat, wie die kürzeste-Pfad-Distanz von s zu v.
c) Beschreibe den Simplex-Algorithmus für das Kürzeste-Wege lineare Programm direkt in Bezug auf die Knotendistanzen. Was bedeutet es insbesondere, wenn man eine Pivot-Operation von einer zulässigen Basis zu einer anderen zulässigen Basis ausführt?

Donnerstag

Aufgabe 12.4 (Polyeder). Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyhedron, wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Gib ein Beispiel für ein nicht-leeres P, das für jeden Zielvektor c unbeschränkt ist.
b) Beweise, dass P konvex ist.

Aufgabe 12.5 (Lokal optimale und zulässige Basis).

Stelle ein nicht-degenerierendes lineares Programm in kanonischer Form mit n Variablen und $m + n$ Constraints auf.

a) Argumentiere, dass jede zulässige Basis genau n zulässige (*feasible*) Nachbarn hat.
b) Argumentiere, dass jede lokal optimale Basis genau m lokal optimale Nachbarn hat.

Hinweis: Wandel das LP in eine äquivalente Form um.

Aufgabe 12.6 (Initiale Basis für Simplex). In dieser Aufgabe entwickeln wir eine Standardmethode, um eine initiale zulässige (*feasible*) Basis für den Simplex-Algorithmus zu berechnen. Nimm an, wir erhalten ein lineares Programm (P) mit m Variablen und $n+m$ Nebenbedingungen als Eingabe:

$$\begin{array}{rrl} \max & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Um eine initiale zulässige Basis für (P) zu berechnen, lösen wir ein modifiziertes lineares Programm (P') für das eine neue Variable λ und zwei neue Constraints $0 \leq \lambda \leq 1$ eingeführt und die Zielfunktion angepasst wird:

$$\begin{array}{rrl} \max & \lambda & \\ \text{s.t.} & Ax - b\lambda & \leq 0 \\ & \lambda & \leq 1 \\ & x, \lambda & \geq 0 \end{array}$$

a) Beweise, dass $x_1 = x_2 = \cdots = x_d = \lambda = 0$ eine zulässige Basis für (P') ist.
b) Beweise, dass (P) genau dann eine Lösung hat, wenn für (P') der optimale Wert 1 ist.

Sternaufgabe

Aufgabe 12.7 (⭐: Carathéodory's Theorem). Seien $A_1, \ldots, A_n$ Vektoren in $\mathbb{R}^m$.

a) Zeige, dass jedes Element y von

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \ : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}$$

als eine Summe $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ geschrieben werden kann, in der $\lambda_i \geq 0$ für alle Koeffizienten gilt und höchstens m der Koeffizienten λ_i von Null verschieden sind.
Hinweis: Betrachte das Polyhedron

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

b) Sei P die konvexe Hülle der Vektoren $A_1, \ldots, A_n$, gegeben durch

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

Zeige, dass jedes Element $y \in P$ als eine Summe $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ geschrieben werden kann, in der $\lambda_i \geq 0$ für alle Koeffizienten gilt, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ gilt, und höchstens $m+1$ der Koeffizienten λ_i von Null verschieden sind.