Algorithmen und Datenstrukturen 2

ALGO2 · WiSe-2021/22 · tcs.uni-frankfurt.de/algo2 · 2022-01-29 · *a002f15*

Übungen zu Woche 13: Lineare Programmierung II

Das Übungsblatt enthält alle empfohlenen Lernaktivitäten für die aktuelle Woche.

- **Heimarbeit bis Montag 17:00.**
  - Schau die Videos an und lies die Buchkapitel.
  - Bearbeite die -Aufgabe in Moodle. (Feste Abgabefrist!)
  - Lese den Aufgabentext aller Übungsaufgaben.
- **Heimarbeit.** Bearbeite die Übungsaufgaben soweit möglich. Probier zumindest alle mal!
- **Dienstag/Donnerstag.**
  - **8:00–8:15.** Besprechung im Hörsaal.
  - **8:15–9:15.** Bearbeite jetzt die Übungen, die du noch nicht lösen konntest. Sprich mit anderen Studis! Frag das Vorlesungsteam um Hilfe!
  - **9:15–9:45.** Lösungsspaziergang zu den Aufgaben für heute.

Dienstag

Aufgabe 13.1 (Primal vs Dual LP). Stelle für das folgende LP das korrespondierende duale LP auf.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & \geq & 1 \\
 & 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & \leq & 2 \\
 & -3x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\
 & & & & & & & x_1, x_3 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Aufgabe 13.2 (Bipartites Maximum Matching LP). Das *Bipartite Maximum Matching Problem* kann als LP formuliert werden. Die Eingabe ist ein bipartiter Graph $G = (U \cup V, E)$, wobei $E \subseteq U \times V$ und die Ausgabe ist das größte Matching in G.

a) Stelle ein lineares Programm auf, das für jede Kante eine Variable besitzt.

b) Stelle das duale LP aus *Teil a)* auf. Was repräsentieren die dualen Variablen und die Zielfunktion? Welches Problem ist das?

Aufgabe 13.3 (Totale Unimodularität). Der Minor (auch Unterdeterminante genannt) einer Matrix A ist die Determinante einer quadratischen Untermatrix, die aus jeder Teilmenge der Zeilen und jeder Teilmenge der Spalten von A bestehen kann. Eine Matrix A ist *total unimodular*, wenn jeder Minor M von A den Wert $-1, 0$ oder 1 hat.

a) Sei A eine beliebige total unimodulare Matrix.
   i. Beweise, dass die transponierte Matrix A^T ebenfalls total unimodular ist.
   ii. Beweise, dass die Matrix A durch das Negieren beliebiger Zeilen oder Spalten total unimodular bleibt.
   iii. Beweise, dass die Blockmatrix $[\ A \mid I\ ]$ total unimodular ist.

b) Beweise, dass das kanonische lineare Programm $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ für eine beliebige total unimodulare Matrix A und einen beliebigen ganzzahligen Vektor b eine ganzzahlige optimale Lösung hat.
   Hinweis: Cramersche Regel.

Donnerstag

Aufgabe 13.4 (Schulzuweisungs ILP). Betrachte einen Schulbezirk mit I Schulen, G Jahrgangsstufen an jeder Schule und J Nachbarschaften. Jede Schule i hat eine Kapazität von C_{ig} für den Jahrgang g. Die Anzahl der Schüler der Jahrgangsstufe g aus jeder Nachbarschaft j beträgt S_{jg}. Die Distanz einer Schule i zu Nachbarschaft j beträgt d_{ij}.

Formuliere ein ganzzahliges lineares Programm, dessen Zielfunktion es ist, alle Schüler einer Schule zuzuweisen, wobei die von allen Schülern zurückgelegte Distanz zwischen ihrer Nachbarschaft und ihrer Schule minimiert werden soll.

Hinweis: Führe Variablen x_{jig} ein, die die Anzahl der Schüler aus Nachbarschaft $j \in J$, die die Schule $i \in I$ in der Jahrgangsstufe $g \in G$ besuchen, darstellen.

Aufgabe 13.5 (Schief-symmetrische Matrizen). Eine Matrix $A = (a_{ij})$ wird genau dann *schief-symmetrisch* genannt, wenn $a_{ji} = -a_{ij}$ für alle Indizes i, j gilt; insbesondere ist jede schief-symmetrische Matrix quadratisch. Ein kanonisches lineares Programm $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ist selbst-dual, wenn die Matrix A schief-symmetrisch ist und für den Zielvektor c und den Vektor der Nebenbedingungen b folgender Zusammenhang besteht: $c = -b$.

Beweise, dass ein beliebiges selbst-duales lineares Programm (P) syntaktisch äquivalent zu seinem dualen linearen Programm (D) ist.

Aufgabe 13.6 (Integer Linear Programs (ILPs) sind NP-hart). Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$ und $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Das *Integer Feasability Problem* ist, zu entscheiden, ob $\mathrm{P} \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$ gilt. Zeige, dass das *Integer Feasability Problem* NP-hart ist, indem du eine Reduktion ausgehend von 3-SAT durchführst.

Hinweis: Es soll eine 3CNF Formel mit m Klauseln und n Variablen zu P transformiert werden.