E 12.10 3SAT $\leq$ Graph Coloring

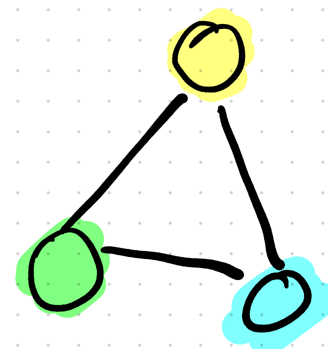
Graph $G = (V, E)$

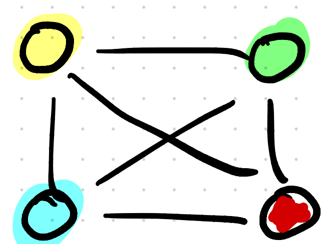
Rot Blau Schwarz

Färbung $c : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$

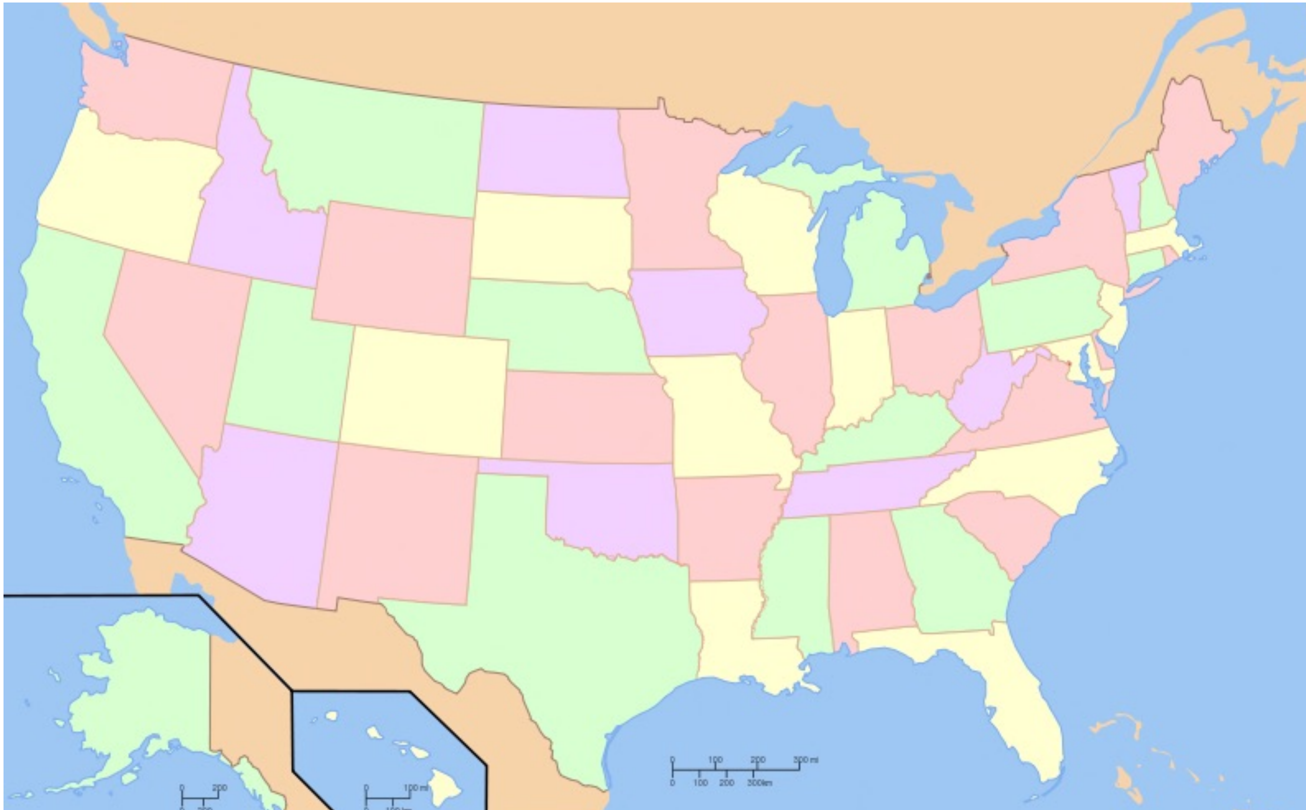
eine Färbung c ist echt, wenn

$$\forall \{u, v\} \in E \,.\, c(u) \neq c(v)$$





Echte Färbung einer Landkarte



3COLOR

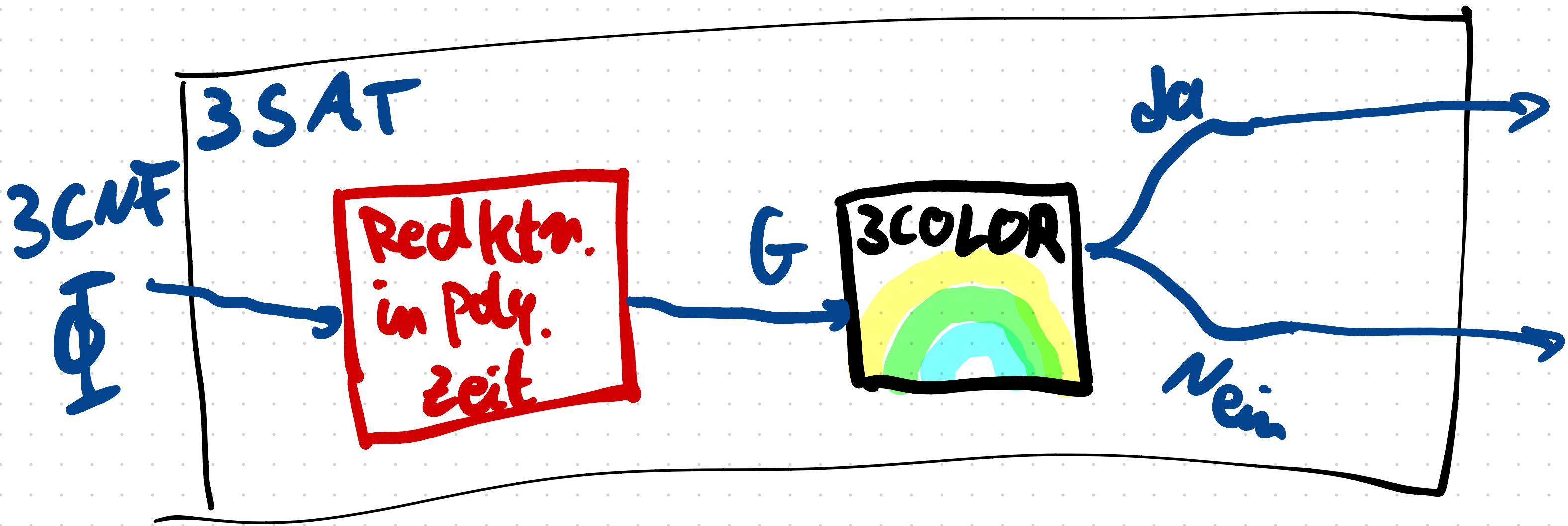
Eingabe: $G = (V, E)$

Ausgabe: Ja, wenn G eine echte Färbung $c: V \to \{1, 2, 3\}$ mit drei Farben hat.

Nein, sonst

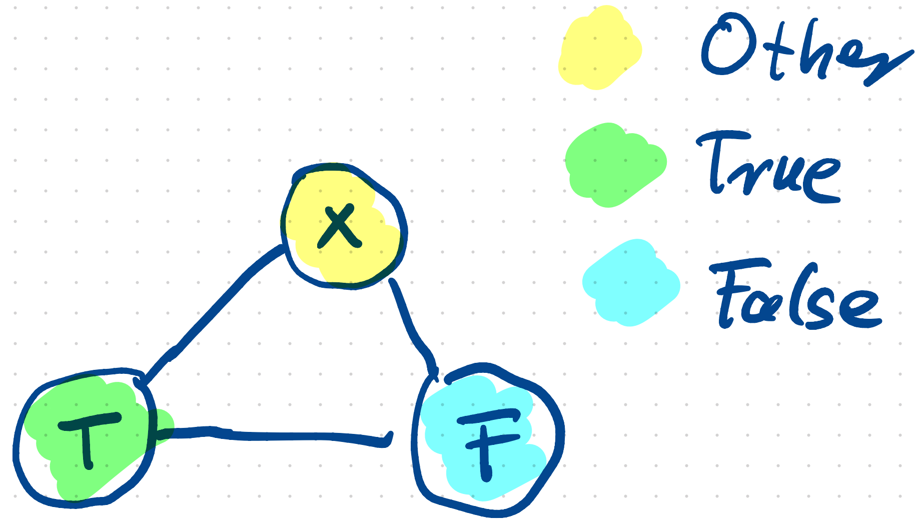
zu Zeigen: 3COLOR ist NP-schwer

durch Reduktion von 3SAT:

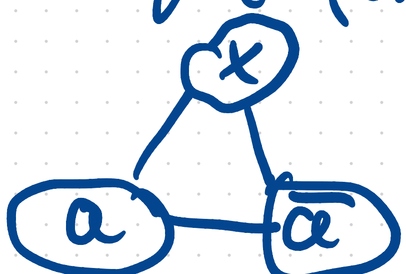


Idee: Gadgets

Truth Gadget:

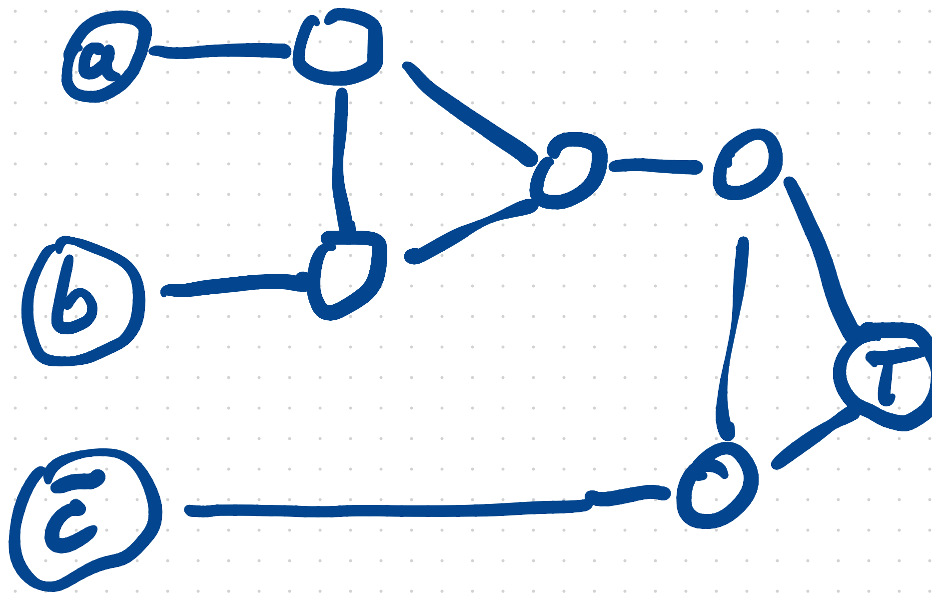


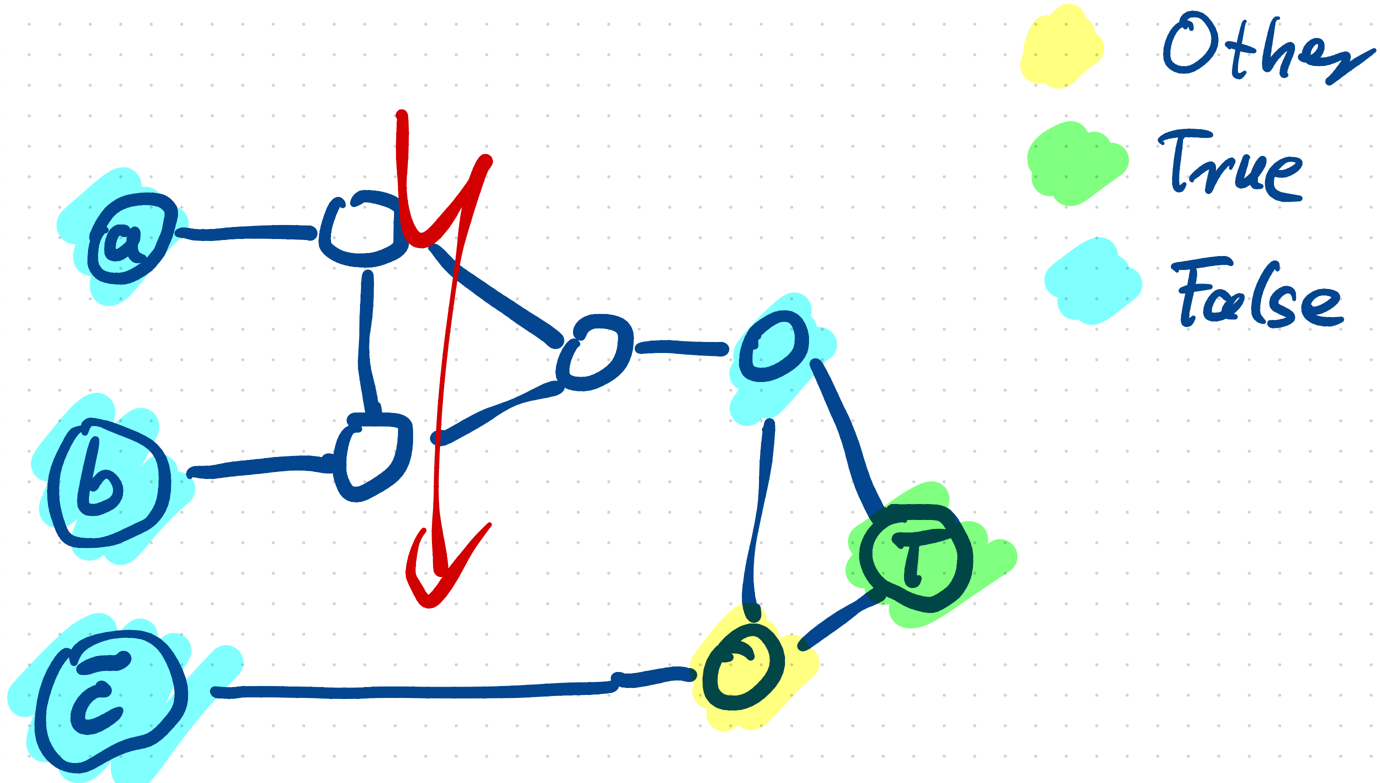
Variable Gadget für jede Variable a:



Clause gadget:

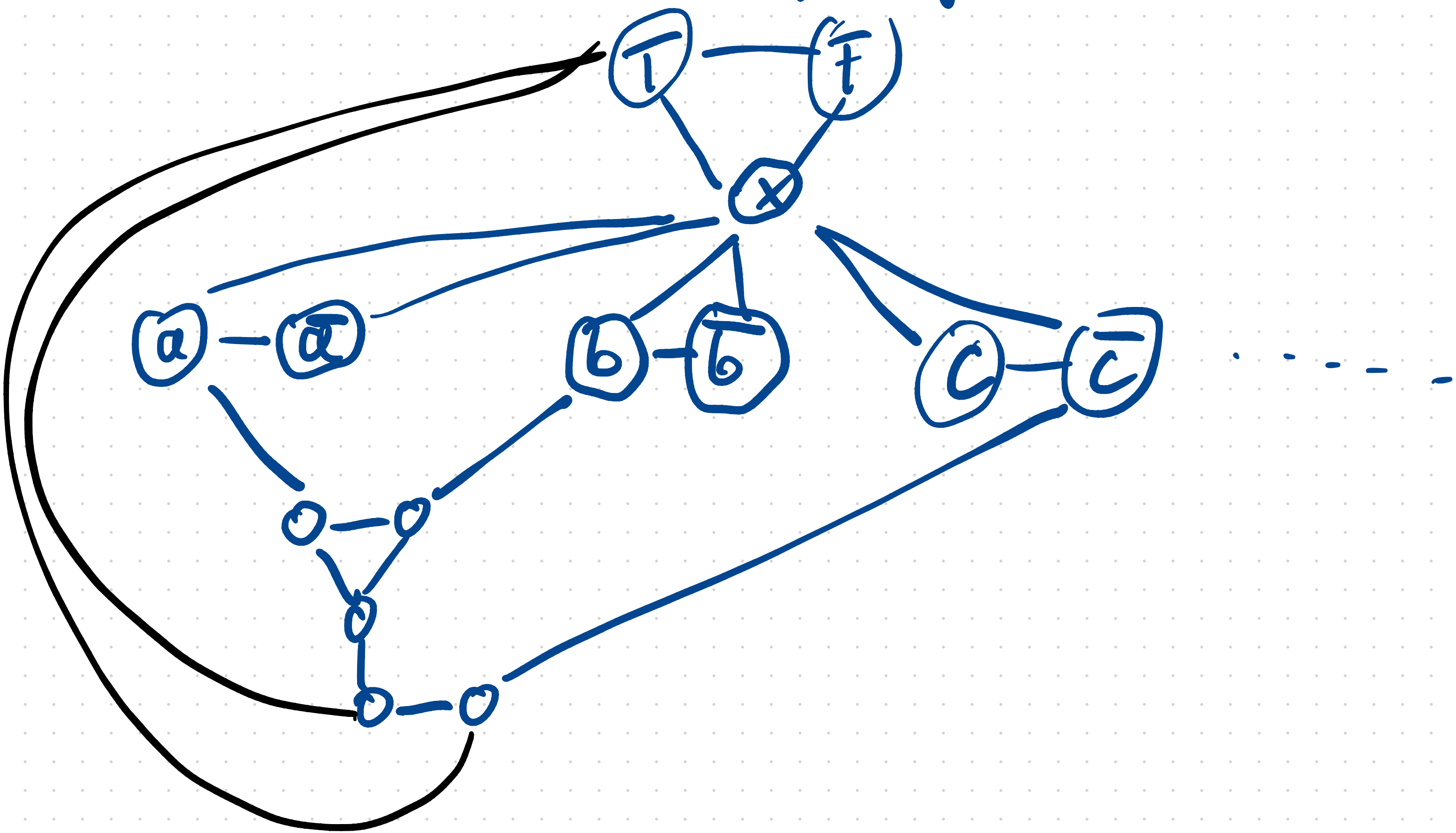
$a \vee b \vee \bar{c} \longmapsto$



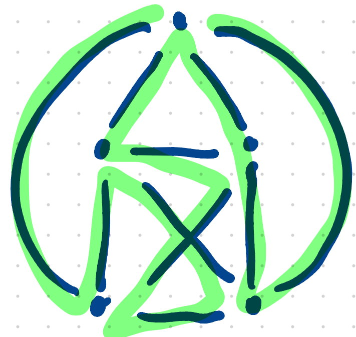


Alle anderen Färbungen für a, b, $\bar{c}$ sind erlaubt. Siehe E Figure 12.14

3CNF $\Phi \longmapsto$ graph G

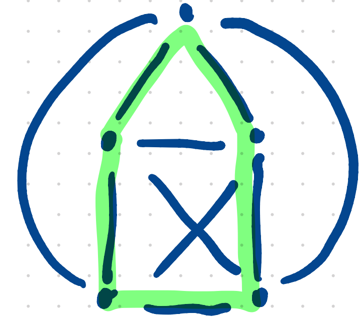


E 12.11 Hamiltonische Kreise



Eulerkreis

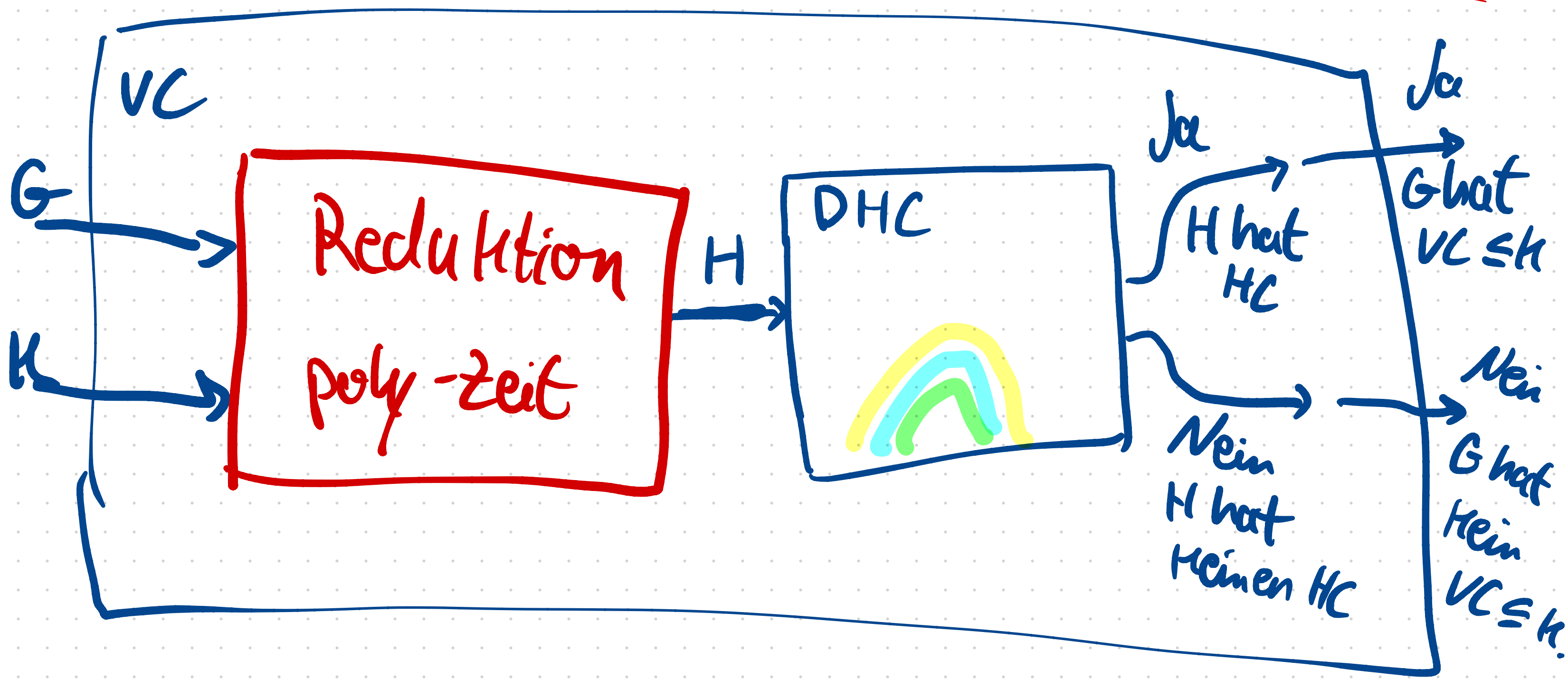
in P



Hamiltonischer Kreis

NP-schwer

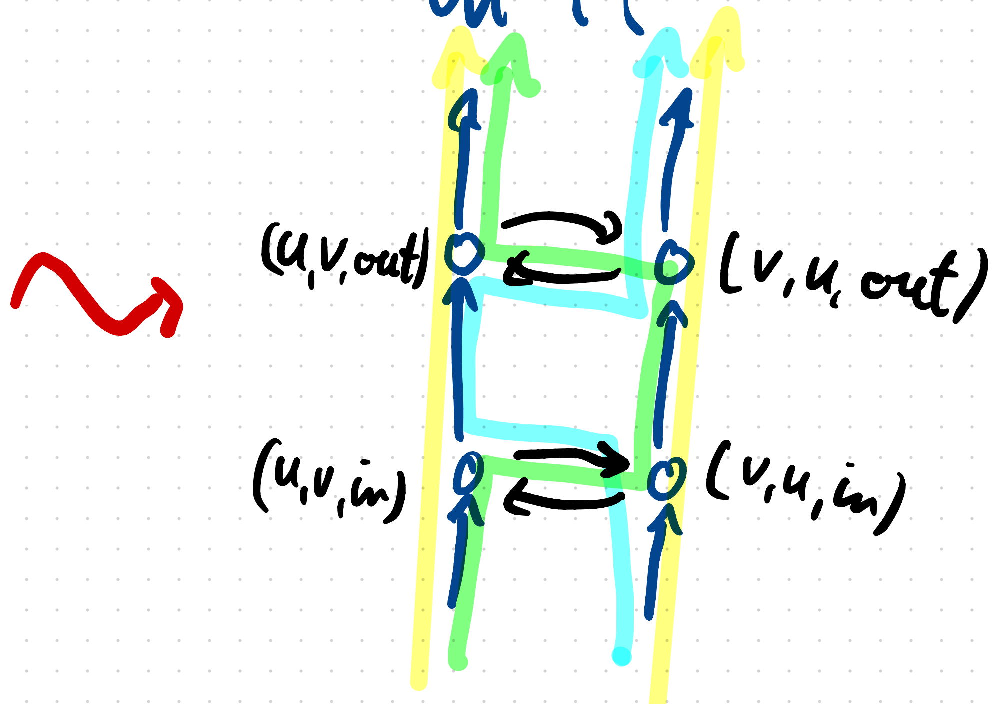
Vertex Cover $\leq_p$ Directed Hamiltonian Cycle

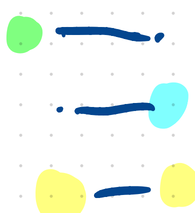


Kantengadget

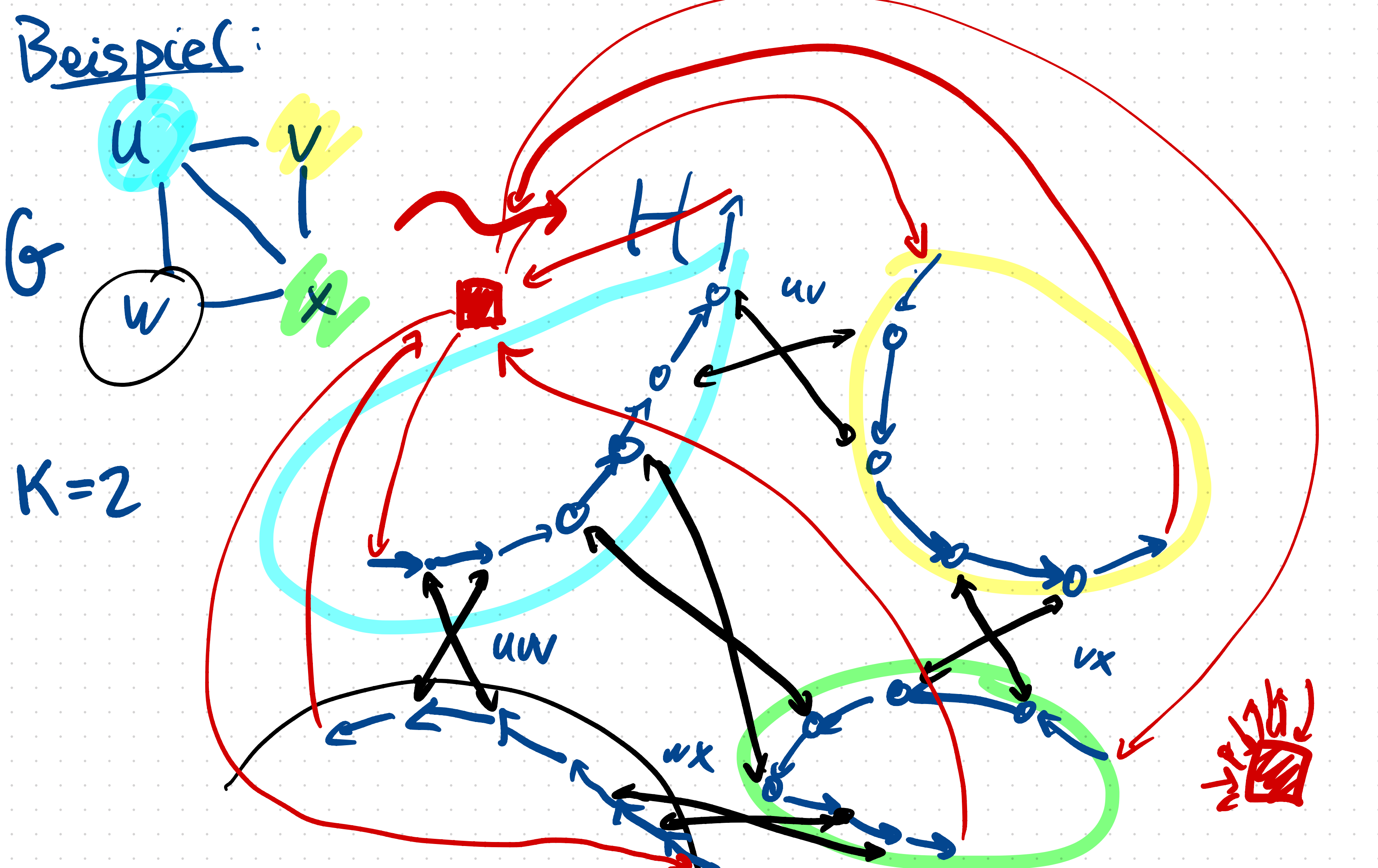
in G

in H





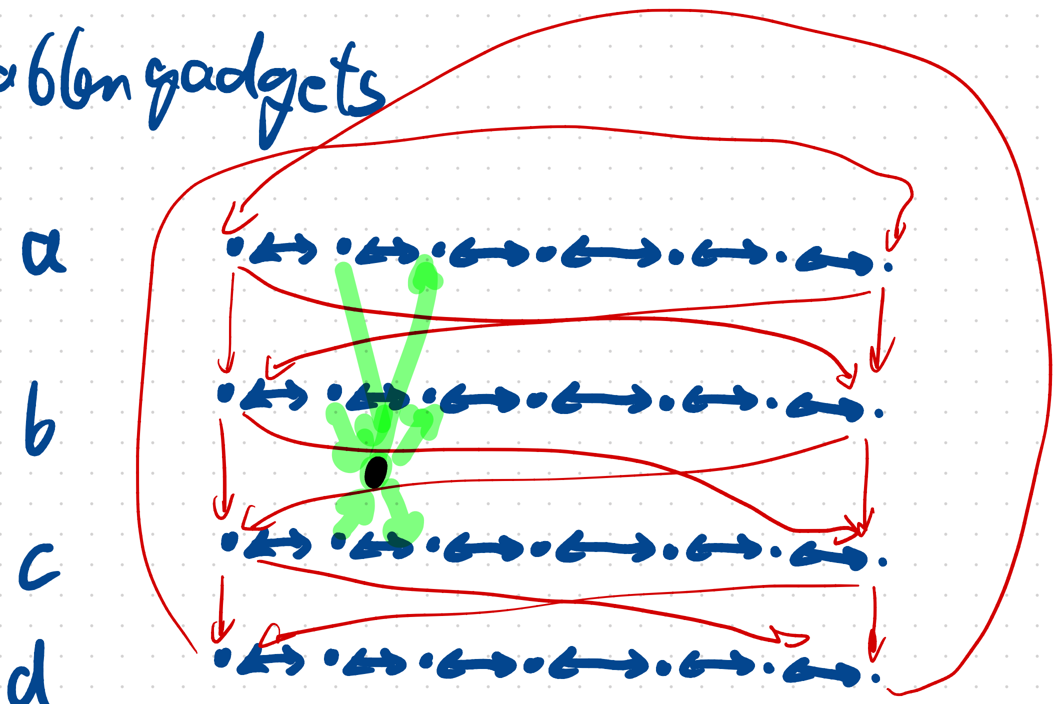
Beispiel:

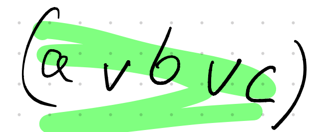


3SAT $\leq_p$ Directed Hamiltonian Cycle

→ Alternativer Beweis, dass DHC NP-schwer ist.

Variablengadgets





E 12.12 Subset Sum

Eingabe: Endliche Menge $X \subseteq \mathbb{N}$
Zahl $T \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Menge $X' \subseteq X$
mit $\sum_{x \in X'} x = T$?

Subset Sum ist NP-schwer

Vertex Cover $\leq_p$ SubsetSum

Gegeben: $G = (V, E)$, k.

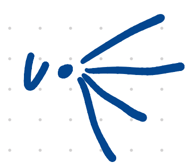
$E = \{0, 1, \dots, m-1\}$

$\rightsquigarrow X = \{ b_i \mid i \in E\} \cup \{ a_v \mid v \in V\}$

$b_i = 4^i$

$a_v = 4^m + \sum_{i \in \Delta(v)} 4^i$

$T = k \cdot 4^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2 \cdot 4^i$



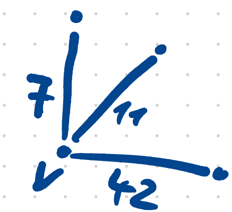
$\Delta(v) = \{$an v inzid. Kanten$\}$

Darstellung als Zahl zur Basis 4

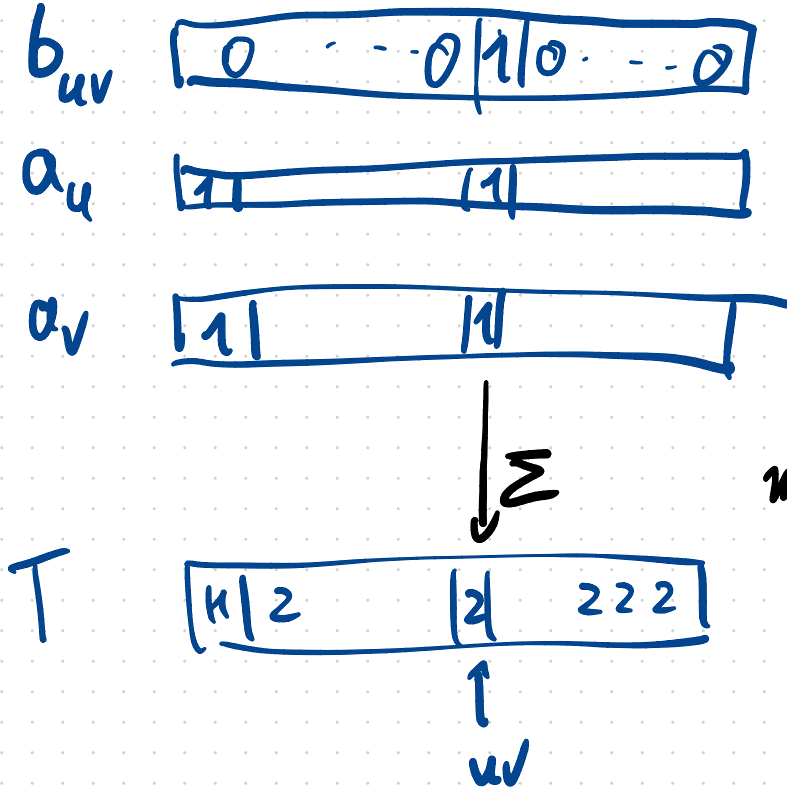
$$25 = 1\cdot 4^2 + 2\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0 = 121_4$$

$$b_i = 4^i = \begin{array}{cccccccccc} m & m-1 & & & & i & \ldots & 2 & 1 & 0 \\ \end{array}$$
$$\left.\begin{array}{|c|c|cccc|c|ccc|} \hline 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right._4 \in \{0,1,2,3\}^m$$

$$a_v = 4^m + \sum_{i\in\Delta(v)} 4^i = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 42 & 11 & 7 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$



$$T = K\,4^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2\cdot 4^i = \begin{array}{|c|cccccc|} \hline K & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ \hline \end{array}$$



müssen a_u oder a_v in Teilmenge aufnehmen

⇝ ausgewählte a_v bilden ein V.C.

Beweis der Korrektheit

Sei G ein Graph, $k \in \mathbb{N}$, und X, T die Ausgabe der Reduktion.

z.z. G hat $VC \leq k \iff \exists X' \subseteq X,$
$$\sum X' = T$$

"$\Rightarrow$" Sei $C \subseteq V$ ein VC mit $|C| \leq k$.

$\rightsquigarrow$ Sei $X' = \{ a_v \mid v \in C \}$
$\cup \{ b_i \mid i \in E$ mit genau einem Ende in $C \}$

"$\Leftarrow$": Sei $X' \subseteq X$ mit $\sum X' = T$

$$\rightsquigarrow \sum X' = \sum_{v \in V'} a_v + \sum_{i \in E'} b_i$$

Behauptung: $\underbrace{V' \text{ ist ein VC}}_{\text{folgt aus Darstellung zur Basis } 4}$ mit $\underbrace{|V'| = k}_{\text{folgt weil erste Spalte zu } k \text{ summiert}}$

Erinnerung an ALGO1:

SubsetSum hat einen Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot T)$ läuft.

(Dynamische Programmierung)

$\rightsquigarrow$ heißt das nicht, dass $P = NP$, weil SubsetSum NP-schwer?