Algorithmen und Datenstrukturen 2

WiSe 2021/22 · Prof. Dr. Dell
5. April 2022
Klausurnummer: **0000**

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Nachname (Druckschrift)**:** _____

Vorname (Druckschrift)**:** _____

Matrikelnummer: _____

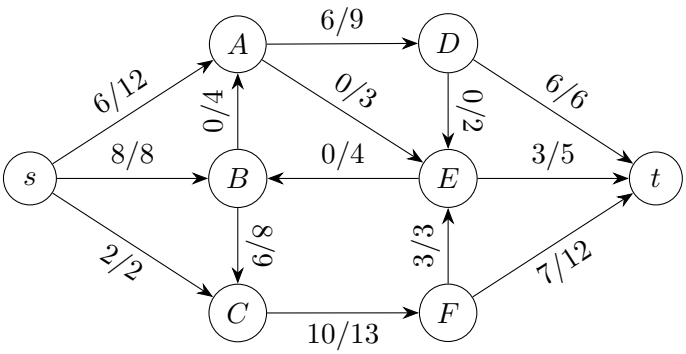
Studiengang: _____

Bitte Hinweise beachten:

- Die Klausur dauert **180 Minuten**.
- Name/Matrikelnummer **nur auf diesem Titelblatt!**
- **Kein Zusatzpapier** abgeben! Am Ende der Klausur finden Sie leere Seiten.
- **Alle elektronischen Geräte sind untersagt!** Insbesondere also Handys, Smartwatches, Taschenrechner. Ausschalten und wegpacken! Nichtbeachtung stellt einen Täuschungsversuch dar und führt zum Nichtbestehen der Klausur.
- Zugelassene Hilfsmittel:
  - Ein DIN A4 Blatt mit handschriftlichen Notizen (beidseitig).
  - Dokumentenechte Stifte in den Farben blau und schwarz. (Füller, Tipp-Ex, Tintenlöscher sind untersagt.)
- Bewertung:
  - **Immer nur eine Lösung** angeben, sonst gilt die Aufgabe als nicht gelöst.
  - Begründungen sind nur notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies verlangt.
  - In allen Multiple-Choice-Fragen sind **genau zwei von fünf Antworten** richtig. Wenn man x richtige Kreuze setzt und y falsche, erhält man $\max\{x-y,0\}$ Punkte, also entweder 0, 1, oder 2 Punkte. Zum Beispiel:

richtige Kreuze	x	2	2	1	1	0
falsche Kreuze	y	0	1	0	1	2
Punkte	$\max\{x-y,0\}$	2	1	1	0	0

Betrachten Sie den s-t-Fluss f in dem folgenden Flussnetzwerk (G, s, t, c):



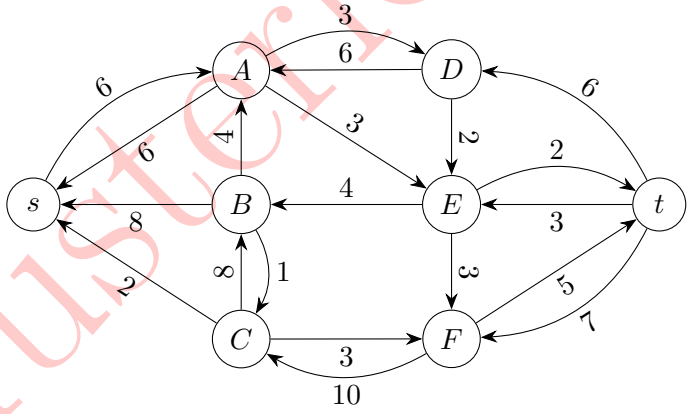
Jede Kante uv ist hierbei mit $f(uv)/c(uv)$ beschriftet, zum Beispiel trägt die Kante AD den Fluss $f(AD) = 6$ und hat die Kapazität $c(AD) = 9$.

a) Der s-t-Fluss f hat den Wert 16.

(/ 1 Punkte)

b) Zeichnen Sie den zugehörigen Residualgraphen G_f für das Flussnetzwerk (G, s, t, c) und den Fluss f in der folgenden Abbildung ein. Geben Sie dabei die Restkapazitäten durch Beschriftung an jeder Kante von G_f an. Kanten mit Restkapazität 0 sollen **nicht** gezeichnet werden.

Musterlösung:



(/ 3 Punkte)

c) Der Wert eines maximalen Flusses in (G, s, t, c) ist 21.

(/ 1 Punkte)

d) Geben Sie die beiden Mengen S, T eines minimalen Schnittes in (G, s, t, c) an.

$S = \{s,$ A, D $\}$,

$T = \{t,$ B, C, E, F $\}$.

(/ 2 Punkte)

e) Welche zwei der folgenden fünf Aussagen über das Flussnetzwerk (G, s, t, c) und den Fluss f sind wahr?

☐ Der Fluss f könnte sich als Zwischenergebnis bei der Anwendung des Algorithmus von Edmonds und Karp mit Eingabe (G, s, t, c) ergeben.

☑ Der Capacity-Scaling-Algorithmus mit Eingabe (G, s, t, c) könnte (s, B, C, F, t) als ersten augmentierenden Pfad auswählen.

☐ Der Capacity-Scaling-Algorithmus mit Eingabe (G, s, t, c) könnte (s, A, E, B, C, F, t) als ersten augmentierenden Pfad auswählen.

☐ In (G, s, t, c) hat der Pfad (s, A, E, B, C, F, t) eine "bottleneck"-Kapazität von 13.

☑ Der Algorithmus von Ford und Fulkerson mit Eingabe (G, s, t, c) könnte (s, A, E, B, C, F, t) als ersten augmentierenden Pfad auswählen.

(/ 2 Punkte)

f) Gegeben sei ein Graph H mit Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wir führen vier Schritte von Floyd-Warshall's Algorithmus auf H aus und erhalten die folgende Matrix als Zwischenergebnis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 1 \\ 4 & 11 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 13 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Floyd-Warschall's Algorithmus wird noch einen letzten Schritt ausführen und ist dann fertig. Geben Sie für die folgenden Wahlen von u und v jeweils die minimale Länge eines Weges von u nach v an.

$u = 1$ und $v = 4$: 3

$u = 3$ und $v = 2$: 14

$u = 3$ und $v = 3$: 0

$u = 5$ und $v = 1$: 6

(/ 2 Punkte)

g) Das Vorlesungsteam von Professor Aglot umfasst n Personen (Tutor:innen und Senior Staff) und will jede Woche einen Lösungsspaziergang durchführen. Das Semester umfasst m Wochen. Um einen Lösungsspaziergang durchzuführen, sind für jede Woche die folgenden vier Tätigkeiten notwendig:

1. Alle Übungsaufgaben der Woche lösen
2. Folien für den Lösungsspaziergang entwerfen
3. Feedback auf Folienentwürfe geben
4. Lösungsspaziergang halten

Jede Tätigkeit benötigt in jeder Woche eine Stunde. Die i-te Person darf im ganzen Semester höchstens z_i Stunden arbeiten und nur an einer Teilmenge $T_i \subseteq \{1, \ldots, 4\}$ von Tätigkeiten arbeiten. Außerdem darf jede Person höchstens eine Tätigkeit pro Woche übernehmen.

Wir wollen eine Zuordnung ermitteln, die angibt, wer in welcher Woche welche Tätigkeiten übernehmen soll. Das heißt, wir wollen ein Array $A[1..n][1..m]$ berechnen, sodass $A[i][j] = k$ ist, wenn Person i in Woche j die Tätigkeit $k \in T_i$ übernimmt.

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der in Polynomialzeit eine Zuordnung A bestimmt, sodass alle Lösungsspaziergänge stattfinden und niemand zu viel arbeitet; falls keine solche Zuordnung existiert, soll der Algorithmus dies erkennen.

Musterlösung: Wir definieren ein Flussnetzwerk (G, s, t, c). Zusätzlich zu den Knoten s und t gibt es zwei Typen von Knoten:
Knoten $(1, i)$ für alle Personen i.
Knoten $(2, i, j)$ für alle Personen i und Wochen j.
Knoten $(3, \tau)$ für alle Tätigkeiten $\tau \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Wir fügen alle Kanten $(s, (1, i))$ ein und setzen $c(s, (1, i)) = z_i$ für alle i.
Wir fügen alle Kanten $((1, i), (2, i, j))$ ein und setzen die Kapazität auf 1.
Für alle $\tau \in T_i$ fügen wir alle Kanten $((2, i, j), (3, \tau))$ ein und setzen ihre Kapazität auf 1.
Wir fügen alle Kanten $((3, \tau), t)$ ein und setzen ihre Kapazität auf m.
Das war die Beschreibung des Flussnetzwerks. Wir berechnen einen maximalen s-t-Fluss f mithilfe des Ford-Fulkerson Algorithmus. Alle Tätigkeiten können bearbeitet werden genau dann, wenn f den Wert $4m$ hat. Die Zuordnung $A[i][j]$ ergibt sich durch den Fluss auf den Kanten $((2, i, j), (3, \tau))$. Wenn dort Fluss läuft, dann setzen wir $A[i][j] = \tau$.
Die Zuordnung ist eindeutig: Wenn $\tau \neq \tau'$, so kann es nicht sein, dass $((2, i, j), (3, \tau))$ und $(((2, i, j), (3, \tau'))$ beide positiven Fluss tragen. Der Grund ist, dass Ford-Fulkerson immer einen integralen Fluss berechnet und maximal ein Fluss von 1 in den Knoten $(2, i, j)$ hineinführt.

(/ 3 Punkte)

Wir betrachten eine Funktion FUN. Ein Aufruf FUN(i) verursacht Laufzeitkosten in Höhe von T_i, wobei

$$T_i = \begin{cases} i & \text{wenn } i \text{ eine Potenz von 3 ist, also } i = 3^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Beispiel verursacht der Aufruf FUN(2) die Kosten $T_2 = 1$ und der Aufruf FUN(9) die Kosten $T_9 = 9$.

a) Wir rufen die Funktion FUN wie folgt n Mal auf:

```
for i from 1 to n do
    FUN(i)
```

Welche amortisierte Laufzeit hat FUN in diesem Programmschnipsel? Geben Sie Ihre Antwort in Θ-Notation **als Funktion von n** an:

$\Theta($ 1 $)$

(/ 1 Punkte)

b) Beweisen Sie **mithilfe der Aggregationsmethode**, dass Ihre Behauptung in a) korrekt ist.

Musterlösung: Die Gesamtkosten $T_1 + \cdots + T_n$ setzen sich zusammen aus den Kosten 1 für jede Nicht-Dreierpotenz i und den Kosten i für jede Dreierpotenz i. Da es $\Theta(n)$ Nicht-Dreierpotenzen gibt, ist der erste Teil der Kosten $\Theta(n)$. Der zweite Teil der Kosten ist gleich $\sum_{k=1}^{\lceil \log_3 n \rceil} 3^k = 3^{\lceil \log_3 n \rceil + 1} - 2 = \Theta(n)$.
Daher gilt $T_1 + \cdots + T_n = \Theta(n)$. Da wir n Operationen haben, sind die amortisierten Kosten je Operation $\sum_{i=1}^{n} T_i/n = \Theta(1)$.

(/ 2 Punkte)

c) Wir rufen die Funktion FUN wieder n Mal auf, diesmal aber wie folgt:

```
for i from 1 to n do
    FUN(3^i)
```

Welche amortisierte Laufzeit hat FUN in diesem Programmschnipsel? Geben Sie Ihre Antwort in Θ-Notation **als Funktion von n** an:

$\Theta($ $3^n/n$ $)$

(/ 1 Punkte)

d) Wir haben eine mögliche Implementierung der Funktion FUN gefunden. Betrachten Sie folgenden Pseudocode:

```
s = 1
L = 1
function FUN(i)
    if s = L then
        L = Z · L          (*)
        for j from 1 to s do
            print "Hallo"
    else
        print "Hallo"
    s = s + 1
```

Hierbei sind s und L globale Variablen, die Anfangs 1 sind und von FUN verändert werden. Wir messen die Laufzeitkosten von FUN nur anhand der Anzahl der **print**-Anweisungen, die ausgeführt werden. Welche Konstante Z in der mit **(*)** markierten Zeile führt dazu, dass die Laufzeitkosten des i-ten Aufrufs für alle i gleich T_i sind?

$Z =$ 3.

(/ 1 Punkte)

e) Angenommen wir ändern die in d) mit **(*)** markierte Zeile zu $L = (\sqrt{L}+1)^2$, um eine Funktion FUN2(i) zu erhalten.

Wir rufen die Funktion FUN2 n Mal wie folgt auf:

```
for i from 1 to n do
    FUN2(i)
```

Welche amortisierte Laufzeit hat FUN2 in diesem Programmschnipsel? Geben Sie Ihre Antwort in Θ-Notation **als Funktion von n** an:

$\Theta($ $\sqrt{n}$ $)$

Musterlösung: Beweis mithilfe der Aggregationsmethode:
L ist anfangs 1. Die Zeile $L = (\sqrt{L}+1)^2$ setzt L auf die nächste Quadratzahl. L wird also $1, 2, 4, 9, 16, 25, \ldots$.
Die Gesamtkosten sind also 1 für jeden Aufruf, in dem i keine Quadratzahl ist. Die Zahl der Nicht-Quadratzahlen in $\{1, \ldots, n\}$ ist $\Theta(n)$. Für die Quadratzahlen in $\{1, \ldots, n\}$ entstehen Kosten in Höhe von $\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} i^2 = \Theta(\sqrt{n} \cdot n) = \Theta(n^{3/2})$. Die Gesamtkosten sind also $\Theta(n) + \Theta(n^{3/2}) = \Theta(n^{3/2})$. Dies wird durch die Anzahl n an Aufrufen geteilt, um die amortisierten Kosten $\Theta(\sqrt{n})$ zu erhalten.

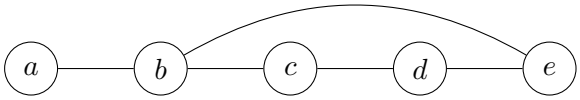
(/ 1 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass das Hamiltonkreisproblem (HC) NP-vollständig ist. Wir betrachten jetzt die folgende Variante von HC, nämlich das Entscheidungsproblem HCAE (Hamilton Cycle and Edge):

Eingabe:	Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $n = \|V\|$.
Frage:	Gibt es n verschiedene Knoten $v_1, \ldots, v_n \in V$, sodass $\{v_1, v_2\}$ eine Kante und $v_2, v_3, \ldots, v_n, v_2$ ein einfacher Kreis in G sind?

a) Zeichnen Sie einen beliebigen Graphen mit genau **fünf** Knoten, für den HCAE die Antwort **ja** fordert:

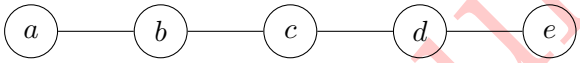
Musterlösung:



(/ 1 Punkte)

b) Zeichnen Sie einen beliebigen Graphen mit genau **fünf** Knoten, für den HCAE die Antwort **nein** fordert:

Musterlösung:



(/ 1 Punkte)

c) Das Problem HCAE ist NP-hart. Der folgende fehlerhafte Text soll angeblich beweisen, dass HCAE NP-hart ist:

> Wir geben eine Polynomialzeit-Reduktion HC $\leq$ HCAE an. Da HC aus der Vorlesung bereits als NP-hart bekannt ist, wird diese Reduktion zeigen, dass auch HCAE NP-hart ist:
>
> 1. Die Eingabe für die Reduktion ist eine Instanz $G = (V, E)$ von HC mit n Knoten.
> 2. Wir konstruieren eine Instanz G', indem wir zunächst G kopieren, also $G' = G$.
> 3. Jetzt fügen wir einen neuen Knoten z zu G' hinzu.
> 4. Außerdem fügen wir die Kanten $\{v, z\}$ für alle $v \in V$ zu G' hinzu.
> 5. Nun senden wir G' an das Orakel HCAE und behaupten, dass G eine ja-Instanz für HC ist genau dann, wenn G' eine ja-Instanz für HCAE ist.

Begründen Sie in 1-3 Sätzen möglichst genau, warum die angegebene Reduktion nicht korrekt ist:

Musterlösung: Die Reduktion kann nein-Instanzen G auf ja-Instanzen G' abbilden, und ist daher nicht korrekt. Ein Beispiel ist der Graph G, der einen Pfad $v_1, \ldots, v_n$ mit n Knoten enthält (und sonst nichts). Der Graph G enthält keinen Hamiltonkreis, aber der Graph G' hat $n + 1$ Knoten und enthält einen Kreis der Länge n (nämlich $v_2, v_3, \ldots, v_n, z, v_2$) an dem eine Kante $\{v_1, v_2\}$ dranhängt.

(/ 2 Punkte)

d) Welche zwei der folgenden fünf Aussagen sind wahr?

- ☐ Wenn es einen Polynomialzeitalgorithmus für HCAE gibt, dann gilt P $\neq$ NP.
- ☑ Wenn es keinen Polynomialzeitalgorithmus für HCAE gibt, dann gilt P $\neq$ NP.
- ☐ Wenn P = NP gilt, dann ist jede Instanz von HCAE eine ja-Instanz.
- ☐ Wenn P = NP gilt, dann gibt es keinen Polynomialzeitalgorithmus für HCAE.
- ☑ Wenn P $\neq$ NP gilt, dann gibt es keinen Polynomialzeitalgorithmus für HCAE.

(/ 2 Punkte)

e) Beweisen Sie, dass HCAE NP-hart ist, indem Sie eine korrekte Reduktion angeben und beide Implikationsrichtungen der Korrektheit Ihrer Reduktion beweisen.

Hinweis: Für die richtige Reduktion muss nur eine Zeile in c) verändert werden! Die korrekten Zeilen brauchen Sie nicht zu wiederholen.

Musterlösung: Wir ändern Zeile 4 wie folgt:
"Außerdem fügen wir die Kante $\{v, z\}$ für irgendeinen festen Knoten $v \in V$ ein."
Die Reduktion ist korrekt:
"$\Rightarrow$". Wenn G eine ja-Instanz von HC ist, dann gibt es einen Hamiltonkreis $v_1, \ldots, v_n, v_1$ in G. Dann gibt es in G' außerdem die Kante $\{v_i, z\}$, wo v_i der Knoten mit $v_i = v$ ist. Die Reihenfolge der Knoten im Kreis ist beliebig, daher ist G' eine ja-Instanz von HCAE.
"$\Leftarrow$". Wenn G' eine ja-Instanz ist, dann gibt es also die Struktur $v_0, \ldots, v_n$, wo $\{v_0, v_1\}$ eine Kante ist und $v_1, \ldots, v_n, v_1$ ein einfacher Kreis. Da z Grad eins hat, kann z nie auf einem Kreis liegen, und wir müssen also $z = v_0$ und $v = v_1$ haben. Aber dann ist der Kreis $v_1, \ldots, v_n, v_1$ vollständig in G enthalten, und somit ist G eine ja-Instanz von HC.

(/ 3 Punkte)

a) Welche zwei der folgenden fünf Sprachen sind **unentscheidbar**?

- ☐ $\emptyset$
- ☑ $\{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert die Sprache } \emptyset\}$
- ☐ $\{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert die Sprache } \textsc{Diverge}\}$
- ☐ $\{\langle M, w\rangle \mid M \text{ verlässt auf Eingabe } w \text{ den Startzustand}\}$
- ☑ $\{\langle M, w\rangle \mid M \text{ besucht auf Eingabe } w \text{ jeden Zustand mindestens einmal}\}$

(/ 2 Punkte)

Sei $M_{\text{ystery}} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \texttt{acc}, \texttt{rej}, \square)$ eine Turingmaschine, wobei $Q := \{q_i \mid 0 \le i \le 5\}$, $\Sigma := \{0, 1, \#\}$, $\Gamma := \Sigma \cup \{\$, \square\}$ und die Überführungsfunktion δ durch die folgenden Übergänge gegeben ist:

$(q_0, 1) \to (q_1, \$, +1)$
$(q_0, \#) \to (q_5, \#, +1)$

$(q_1, 1) \to (q_1, 1, +1)$
$(q_1, \#) \to (q_2, \#, +1)$

$(q_2, x) \to (q_2, x, +1)$ für $x \in \{0, 1\}$
$(q_2, \square) \to (q_3, \square, -1)$

$(q_3, 0) \to (q_3, 1, -1)$
$(q_3, 1) \to (q_4, 0, -1)$

$(q_4, y) \to (q_4, y, -1)$ für $y \in \{0, 1, \#\}$
$(q_4, \$) \to (q_0, \$, +1)$

$(q_5, 0) \to (q_5, 0, +1)$
$(q_5, \square) \to (\texttt{acc}, \square, +1)$

b) Die Maschine M_{ystery} akzeptiert zum Beispiel das Wort 1111#00100. Geben Sie irgendein anderes Wort w_{acc} an, das von M_{ystery} **akzeptiert** wird.

$w_{\text{acc}} =$ 1111#100

(/ 1 Punkte)

c) Geben Sie irgendein Wort $w_{\text{non-acc}}$ an, das von M_{ystery} **nicht akzeptiert** wird.

$w_{\text{non-acc}} =$ 111#1

(/ 1 Punkte)

d) Welche Sprache wird von der Turingmaschine M_{ystery} akzeptiert?

$$L = \left\{ x \in \{0,1,\#\}^* \;\middle|\; \exists n, m \in \mathbb{N}\colon\ x = 1^n\#0^m\,\text{bin}(n) \right\}$$

(/ 2 Punkte)

e) Wir betrachten die folgende Sprache:

$\textsc{HaltEven} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } w \text{ in einer geraden Anzahl von Schritten} \}$.

Beweisen Sie, dass HaltEven unentscheidbar ist.

Musterlösung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Sprache Halt mit

$$\textsc{Halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } w \}$$

unentscheidbar ist. Wir geben eine Reduktion von Halt auf HaltEven an, um zu zeigen, dass HaltEven ebenfalls unentscheidbar ist.
Für die Reduktion beschreiben wir nun eine Orakelmaschine, die Halt mit Hilfe von Orakelfragen an HaltEven entscheidet. Bei Eingabe $\langle M, w \rangle$ konstruiert die Orakelmaschine eine Turingmaschine M', die sich genauso verhält wie M, aber durch zusätzliche Zustände mitzählt, ob sie bisher eine gerade oder ungerade Anzahl von Schritten gemacht hat. Wenn sie den akzeptierenden oder verwerfenden Zustand erreichen würde und bisher eine ungerade Anzahl von Schritten gemacht hat, macht sie noch einen letzten Schritt, bevor sie tatsächlich.
Genauer: Sei $M = (Q, \Sigma, , , \text{start}, \texttt{acc}, \texttt{rej}, \square)$. Für jeden Zustand $q \in Q$ hat M' zwei Zustände q_0, q_1. Der Startzustand von M' ist start_0. Für jeden Übergang $(q, a) \to (q', a',)$ von M hat M' die beiden Übergänge $(q_0, a) \to (q'_1, a',)$ und $(q_1, a) \to (q'_0, a',)$, sodass der Index am Zustand jeweils die Parität der bisherigen Anzahl von Schritten angibt. Der akzeptierende Zustand von M' ist $\texttt{acc}_0$ und der verwerfende Zustand von M' ist $\texttt{rej}_0$. Außerdem fügen wir Übergänge $(\texttt{acc}_1, a) \to (\texttt{acc}_0, a, +1)$ für alle $a \in$ hinzu.
Es gilt nun, dass M auf Eingabe w akzeptiert genau dann, wenn M' auf Eingabe w in einer geraden Anzahl von Schritten akzeptiert (siehe Korrektheitsbeweis unten). Somit kann die Orakelturingmaschine nun die Frage Orakelfrage "$\langle M', w \rangle \in$HaltEven?" stellen und bei positiver Antwort akzeptieren sowie bei negativer Antwort ablehnen.
Die Reduktion ist offensichtlich berechenbar. Es verbleibt, zu zeigen, dass sie korrekt ist: Es gilt

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in \textsc{Halt} &\Leftrightarrow M \text{ hält auf Eingabe } w \\ &\Leftrightarrow M' \text{ hält auf Eingabe } w \text{ in einer geraden Anzahl von Schritten} \\ &\Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in \textsc{HaltEven} \end{aligned}$$

Das beweist die Korrektheit der Reduktion.

(/ 4 Punkte)

Professor Regloh möchte die schönste Lösung für eine Sternaufgabe ermitteln, um die Autoren mit einem Preis auszuzeichnen. Für die ausgewählte Sternaufgabe wurden n Lösungen abgegeben.

a) Angenommen Professor Regloh geht wie folgt bei seiner Auswahl vor:

while noch nicht alle Lösungen betrachtet wurden **do**
  Wähle uniform zufällig eine von allen n Lösungen aus und betrachte diese.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Professor Regloh nach drei Iterationen der while-Schleife *genau drei verschiedene* Lösungen betrachtet hat? Geben Sie das Ergebnis **als Funktion von n** an.

Antwort: $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}$

Wie viele Lösungen muss Professor Regloh in Erwartung betrachten, bis er alle Lösungen mindestens einmal betrachtet hat? Geben Sie das Ergebnis in Θ-Notation als Funktion von n an:

$\Theta($ $n \log n$ $)$

(/ 2 Punkte)

b) Angenommen, die fantastische Lernplattform El Doom sortiert die n abgegebenen Lösungen gleichverteilt zufällig, dann geht Professor Regloh wie folgt vor:

Er geht der zufälligen Reihenfolge $L_1, \ldots, L_n$ nach alle abgegebenen Lösungen durch. Wann immer er dabei eine noch schönere als die schönste bisher gesehene Lösung findet, schreibt er eine begeisterte Discord-Nachricht an seine Doktorandin Oel. Dabei ist für ihn im paarweisen Vergleich immer eine Lösung eindeutig schöner als die andere.

Sei X_i eine Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, wenn Professor Regloh für die i-te Lösung L_i eine Discordnachricht an Oel schickt, und 0 wenn nicht. Dann gilt:

$P(X_i = 1) =$ $\frac{1}{i}$

Wie viele Discordnachrichten empfängt Oel von Professor Regloh im Erwartungswert? Geben Sie das Ergebnis in Θ-Notation **als Funktion von n** an:

$\Theta($ $\log n$ $)$

(/ 2 Punkte)

c) Welche zwei der folgenden fünf Aussagen sind wahr?

☐ Wir wissen, dass randomisierte Algorithmen in erwarteter Polynomialzeit NP-harte Probleme lösen können.

☐ Um den Median in einem sortierten Array zu bestimmen, ist der randomisierte *Select*–Algorithmus die asymptotisch schnellste bekannte Methode.

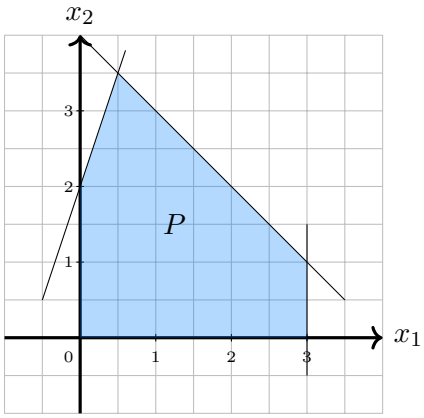
☑ Um den Median in einem unsortierten Array zu bestimmen, ist der randomisierte *Select*–Algorithmus die asymptotisch schnellste bekannte Methode.

☐ Es ist vorteilhaft für den *Quicksort*–Algorithmus, wenn das gewählte Pivotelement immer das maximale Element ist.

☑ Es ist vorteilhaft für den *Quicksort*–Algorithmus, wenn das gewählte Pivotelement immer das Median-Element ist.

(/ 2 Punkte)

a) Gegeben sei folgendes Polytop P in $\mathbb{R}^2$:



Sei das lineare Programm (LP_1) gegeben durch $\max x_1$ unter der Nebenbedingung $(x_1, x_2) \in P$. Welche zwei der folgenden fünf Aussagen bezüglich (LP_1) sind wahr?

☐ Die Lösung $(3, 0)$ mit Zielfunktionswert 2 ist die eindeutige optimale Lösung für (LP_1).

☑ Der Knoten $(3, 1)$ ist *locally optimal* bezüglich der Zielfunktion von (LP_1).

☐ Eine mögliche Reihenfolge von Knoten, die der Simplex Algorithmus auf der Suche nach einer optimalen Lösung für (LP_1) betrachten kann, ist durch $(0, 0), (0, 2), (0, 0), (3, 0)$ gegeben.

☐ Das duale Programm von (LP_1) hat 5 Variablen und 2 Constraints.

☑ Die Lösung $(3, 0.5)$ ist eine optimale Lösung für (LP_1).

(/ 2 Punkte)

b) Welche zwei der folgenden fünf Aussagen sind wahr?

☐ Von der Wahl des Zielfunktionsvektors ist abhängig, ob ein Knoten zulässig ist.

☐ Die Simplex Methode benutzt ein geometrisches Divide-and-Conquer Verfahren, um eine optimale Lösung für ein LP zu finden.

☑ Für ein LP mit n Variablen und m Constraints gibt es höchstens $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ *basic feasible solutions*.

☑ Wenn das primale Programm eine zulässige Lösung hat, dann ist das zugehörige duale Programm beschränkt.

☐ Durch eine LP Relaxierung kann immer eine optimale Lösung für ein MILP in polynomieller Zeit gefunden werden.

(/ 2 Punkte)

c) Seien das primale Program (P) und das duale Program (D) gegeben durch:

$$
\begin{array}{llll}
 & \max & c^T x & \\
(P) & & Ax & \leq b \\
 & & x & \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
 & \min & b^T y & \\
 & & A^T y & \geq c \quad (D) \\
 & & y & \geq 0
\end{array}
$$

Weak Duality. Wenn x eine zulässige Lösung für (P) und y eine zulässige Lösung für (D) ist, dann gilt $c^T x \leq b^T y$.

Beweisen Sie, dass Weak Duality gilt.

Musterlösung:
Da x und y zulässige Lösungen sind, gelten $Ax \leq b, x \geq 0$ und $A^T y \geq c, y \geq 0$. Somit folgt

$$c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T \underbrace{(A^T)^T}_{A} x = y^T A x \leq b^T y.$$

(/ 1 Punkte)

d) Gegeben sei folgendes lineares Programm (LP_2):

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & x_1 & + & 5x_2 & + & 34x_3 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 8x_2 & + & 55x_3 & \leq 144 \\
 & 2x_1 & + & 13x_2 & & & \leq 233 \\
 & 3x_1 & + & 21x_2 & + & 89x_3 & \leq 377 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Geben Sie das duale lineare Programm für (LP_2) an:

Musterlösung:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min & 144y_1 & + & 233y_2 & + & 377y_3 & \\
\text{s.t.} & 2y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq 1 \\
 & 8y_1 & + & 13y_2 & & 21y_3 & \geq 5 \\
 & 55y_1 & + & & + & 89x_3 & \geq 34 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

(/ 3 Punkte)

Wir erinnern uns, dass ein c-Approximationsalgorithmus für ein Minimierungsproblem immer eine Lösung von Wert $\widetilde{\mathrm{OPT}}$ ausgibt, wobei gilt:

$$\mathrm{OPT} \leq \widetilde{\mathrm{OPT}} \leq c \cdot \mathrm{OPT}\,.$$

Hier ist ein heuristischer Algorithmus für das Minimum Vertex-Cover Problem:

function MyVertexCover(G)
  $S = \emptyset$
  while es gibt einen Knoten v in G, der mindestens einen Nachbarn hat **do**
    $S = S \cup \{v\}$
    Lösche v sowie alle an v inzidenten Kanten aus G.
  return S

a) Beweisen Sie, dass MyVertexCover(G) immer ein Vertex-Cover von G zurückliefert:

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, das zurückgelieferte S wäre kein Vertex-Cover. Dann gäbe es noch eine Kante uv wo weder u noch v in S sind. Dann aber hätte die Schleife nicht abgebrochen, sondern hätte u oder v zu S hinzugefügt, da diese ja jeweils mindestens einen Nachbarn haben. Das ist ein Wiederspruch dazu, dass S zurückgeliefert wird. Also muss die Annahme falsch sein, und also ist S ein Vertex-Cover.

(/ 2 Punkte)

b) Beweisen Sie, dass MyVertexCover kein 7-Approximationsalgorithmus für das Minimum Vertex-Cover Problem ist:

Wir betrachten als Graph G den Stern mit 10 Blättern, und wir nehmen an, dass MyVertexCover(G) zuerst die Blätter bearbeitet. Dann liefert MyVertexCover(G) also die Menge der 10 Blätter zurück, während das optimale Vertex-Cover nur aus dem zentralen Knoten besteht. Die gelieferte Lösung ist also zehnmal schlechter als die optimale und daher keine 7-Approximation.

(/ 2 Punkte)

c) Wir betrachten jetzt nur Eingaben G mit Maximalgrad höchstens 13, das heißt, jeder Knoten von G hat mindestens 0 und höchstens 13 Nachbarn.

Beweisen Sie, dass MyVertexCover(G) ein 14-Approximationsalgorithmus für das Minimum Vertex-Cover Problem auf solchen Eingaben ist.

Musterlösung: Sei S die von MyVertexCover(G) ausgegebene Lösung und sei S^* ein minimales Vertex-Cover. Zu Zeigen: $|S| \leq 14|S^*|$.
Wir erinnern uns, dass $N[v]$ die Menge mit $N[v] = \{v\} \cup N(v)$ ist, also die geschlossene Nachbarschaft von v. Diese enthält v und alle Nachbarn von v. Wir definieren die Knotenmenge T mit $T = \bigcup_{v \in S^*} N[v]$. Da S^* ein Vertex-Cover von G ist, enthält T alle Knoten, die mindestens einen Nachbarn haben. Da MyVertexCover(G) nur Knoten zu S hinzufügt, die mindestens einen Nachbarn haben, gilt $S \subseteq T$. Nun folgt:

$$|S| \leq |T| \leq \sum_{v \in S^*} |N[v]| \leq \sum_{v \in S^*} (1 + 13) = 14|S^*| \,.$$

(/ 4 Punkte)